Ministério da Educação
Secretaria de Educação Básica
Universidade de Brasília
Coordenação de Formação Continuada de Professores
Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal – SEEDF

Consolidando Saberes: MATEMÁTICA para os 4º e 5º anos

Brasília 2017

Universidade de Brasília – UnB

Centro de Estudos Avançados Multidisciplinares – CEAM

Núcleo de Estudos e Acompanhamento das Licenciaturas – NEAL

Coordenação de Formação de Professores – CFORM

Autoras

Nilza Eigenheer Bertoni

Cristina Vieira Mendes Osler de Almeida

Raimunda de Oliveira

Ana Paula Santos de Oliveira

Colaboradora

Michelle Cruz Camargo de Oliveira

Coordenadoras

Leila Chalub Martins

Paola Soares Aragão

Revisão

Vera Aparecida de Lucas Freitas

Diagramação

Carolina Sena Pinto

Edição da capa

Carolina Sena Pinto

Sumário

Iniciando a conversa

> Gramsci usou o termo interregno, algo entre reinados: um rei está morto e seu sucessor ainda não assumiu. Hoje, se sente no ar essa dolorosa transição, entre o que não é mais e o que ainda não é mas será.
>
> (Vladimir Carvalho, em entrevista de 04/11/2016, para a revista Omelete)

Caro professor,

Parece que estamos realmente vivendo a história da transição entre realidades de duas eras educacionais e pedagógicas distintas. A anterior nos amarrou por quase um século, a que está por vir nos acena vigorosamente, mostrando claramente inúmeros fatores sociais e humanos que a demandam e devem ser propulsores de nossas ações.

Estamos tentando essa travessia, para a qual não estávamos preparados. Avançamos como podemos, com maior ou menor êxito em algumas frentes. O importante é estarmos sempre arregimentando recursos para avançar, terra adentro, nessa nova realidade, progredindo, como educadores, em nossa adaptabilidade e possibilidade de coparticipação ativa na mesma.

Estamos diretamente corresponsáveis por avançar no reconhecimento da nova realidade matemática vigente no mundo e encaminhar nossos alunos para a viverem, de modo atuante, sem se perderem pela total dissonância entre a formação de seu pensamento e conhecimentos e o mundo real em que já vivem.

É um campo vasto de atuação, para a qual aportamos parte significativa do que conhecemos, estudamos e cremos, apesar de saber que será apenas uma parcela do que se faz necessário.

Nossa contribuição tem seu foco maior na formação de um ser pensante. Embora seja algo necessário em todas as áreas do conhecimento, sua ausência na matemática – a ciência essencialmente lógica – é uma verdadeira aberração. A era que estamos deixando forjou nossas ações para formarmos seres reproducentes, o que funcionou, até certa medida, pela divisão e mecanização rotineira que apresentava, nos seus vários setores de produção.

Mas, longe de querer um ser pensante capaz apenas de ler e entender verdadeiros textos matemáticos, trata-se de formar um ser pensante-operante-ativo, que coordena demandas cotidianas com a lógica do seu pensamento, suas decisões e ações a serem tomadas.

Nesse sentido, é um ser que se espanta e rejeita as ações mecânicas e incompreensíveis apresentadas por grande parte da matemática escolar.

O que procuramos oferecer, nesse caderno, é um possível caminho que dê ao aluno a oportunidade de exercitar seu pensar, seus atos e tomada de decisões, nas experiências com que venha a se defrontar.

Somos uma grande equipe de autores, formadores, orientadores, professores. Que possamos estar juntos, discutindo e contribuindo para bons progressos nessa travessia.

Ampliação do conceito de número para além dos números naturais

Revisitando os números naturais e suas operações

Neste caderno, voltado para os 4º e 5º anos, nosso objetivo é aprofundar as operações de multiplicação e divisão entre números naturais (indo por vezes além deles), por constatar que nem sempre, nesse nível de escolaridade, esse conhecimento já está consolidado. Procuraremos desenvolver o significado dessas operações em situações que as demandam e lhes conferem sentido.

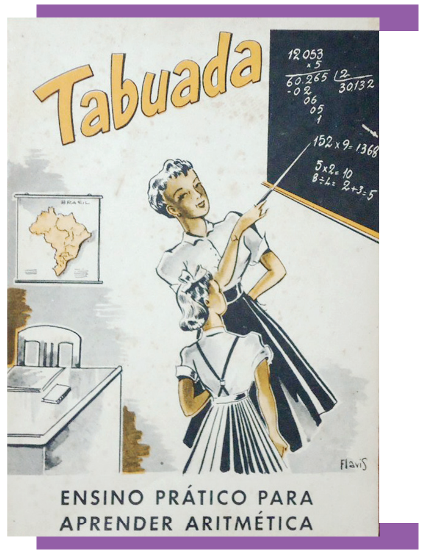
Focaremos nossa atenção em duas questões especiais:

Multiplicação:
tem a ver (ou não) com soma de parcelas iguais?

Algoritimos:
prontos para memorização ou construídos com compreensão?

Multiplicação: é proibido falar em soma de parcelas repetidas?

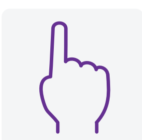
Houve um tempo, que dominou aproximadamente até a década de 1950, em que ensinar multiplicação começava com ensinar tabuadas e ensinar tabuadas era dar listas de multiplicações e seus resultados para serem decorados pelas crianças. Em geral, começava-se pela tabuada do 2, e vinham, em ordem linear, todas as demais, até a do 10, incluindo no total 90 resultados a serem memorizados, até o final do atual 3º ano.



Elas eram aplicadas em algoritmos e nos problemas de multiplicar, que tinham uma identificação aparentemente clara e segura: é quando se sabe o valor de uma coisa e se quer saber o valor de muitas.

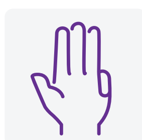
Depois veio um tempo, na década de 1960, em que se procurava dar um sentido às primeiras multiplicações introduzidas – falando-se em somas de parcelas repetidas. A parcela a repetir-se era motivo de confusão: às vezes os livros diziam que 3x5 significava 3 parcelas de 5 e portanto 3 x 5 = 5 + 5 + 5; mas outros diziam que significava 5 parcelas de 3 e portanto 3 x 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3. Consideramos a primeira interpretação mais adequada.

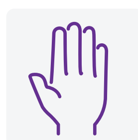
Apesar disso, possibilitou às crianças um recurso para auxiliá-las na difícil tarefa de saber resultados de multiplicações. Para calcular 7 x 3, o processo era assim:


1-2-3


4-5-6


7-8-9


10-11-12


13-14-15


16-17-18


19-20-21

Ou podiam começar mostrando sete dedos, que iam fechando progressivamente:

A cada dedo que baixavam, faziam uma contagem de três elementos. Ao baixar o sétimo dedo, teriam contado até 21.

Na verdade, há uma grande diferença entre o papel que cada termo representa, na multiplicação (e também na divisão). Na adição e na subtração, ambos os termos indicam quantidades, que devem ser juntadas ou uma subtraída da outra. Veja, na situação abaixo, que isso não ocorre na multiplicação.

Também fizemos experiência que você, professor, pode aplicar:

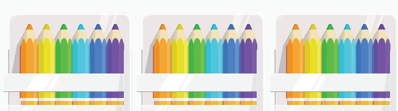
Pedimos a um aluno regular que escrevese o resultado de 4 + 5. Após ele escrever 9, pedimos que nos mostrasse (com desenhos, objetos ou de forma oral) que aquele resultado era verdadeiro. Ele tomou 4 fichas, pôs mais 5 ao lado, contou todas e mostrou que eram 9.

Após isso, pedimos que escrevesse o resultado de 4 x 5 e, logo depois de escrever 20, pedimos a justificativa. Novamente, ele tomou 4 fichas e mais 5 fichas e ficou olhando-as, quieto e sem ação.

No caso descrito no balão acima, o aluno não sabia como a quantidade 20 poderia se originar das 9 fichas que via. Não lhe ocorria que o número 4 indicava apenas quantas vezes devia tomar a quantidade 5. Uma hipótese é de a notação multiplicativa ter sido introduzida com certa pressa, sem a associação a uma situação previamente explorada. O que pode levar o aluno a pensar que, em qualquer operação, os números representam sempre quantidades da mesma natureza, a serem manipulados para produzir uma terceira quantidade. Com uma introdução mais cuidadosa ao conceito de multiplicação, ele teria outros recursos para explicar o resultado.

No final da década de 1980, começaram novos ventos: multiplicação não era apenas soma de parcelas repetidas. Era também *configurações retangulares* e *combinações*. Nas configurações, o total, afinal, podia ser calculado somando as quantidades de todas as filas (sempre iguais) ou das quantidades de todas as colunas (também sempre iguais). Contudo, evitava-se esse processo, pois envolvia somas de parcelas repetidas e isso parecia diminuir o caráter inovador que se queria dar à multiplicação. Nas combinações, tais somas eram evitadas por meio do preenchimento de tabelas ou o desenho de árvores de possibilidades, após o que apresentava-se o total, por meio de uma multiplicação.

Assim, três conceitos entravam em pauta para uma multiplicação mxn: podia ser associada à busca do resultado da soma de m parcelas com valor n; ou ao total de elementos em uma configuração retangular de m filas e n colunas (ou vice-versa); ou ainda ao número de possibilidades resultantes ao se combinar m elementos de uma coleção com n elementos de outra, de todos os modos possíveis.



Parcelas repetidas:
6 + 6 + 6 = 18

Configuração retangular:
Total de elementos:
4 x 6 = 6 x 4 = 24

Combinação de três bermudas com três camisetas: 3 x 3 = 9

Não houve a preocupação de mostrar que se tratava de um mesmo conceito em diferentes representações e que as formas de descrevê-lo recaíam, basicamente, na primeira.

No modo como se apresentava, a multiplicação começava a despregar-se do conceito de soma de parcelas repetidas. Essa tendência evoluiu para a negação, entre educadores matemáticos, de qualquer associação entre os dois conceitos.

Vamos procurar mostrar que isso não é verdade e, mais ainda: como, quando e de que modo a soma de parcelas repetidas se articula ao conceito de multiplicação, produzindo interfaces entre estruturas multiplicativase aditivas.

Multiplicação: para além de somas de parcelas repetidas

Nestas considerações, vamos explorar e explicitar como diferentes tipos de número, ao aparecerem como primeiro fator em uma multiplicação, determinam diferentes interpretações da mesma.

Veremos que o primeiro fator pode ser considerado um operador sobre o segundo, determinando diferentes ações sobre o segundo, conforme o tipo de número que ele (primeiro fator) é ou representa. Essas ações sobre o segundo fator podem ser de: a) manutenção, b) replicação e soma, c) redução ou d) ampliação.

Ações do primeiro fator sobre o segundo fator

a) Manutenção do 2º fator:

Ocorre quando o primeiro fator é igual a 1:

1x6 = 6 (o segundo fator 6 se mantém).

Em matemática, diz-se que 1 é elemento neutro da multiplicação.

b) Replicação e soma do 2º fator:

Ocorre quando o primeiro fator é do tipo 2, 3, 4, ... (um número natural a partir de 2). É o tipo de multiplicação mais próprio dos primeiros anos de escolaridade.

Nesse caso, a multiplicação é efetivamente uma soma de parcelas repetidas, e isso está respaldado nas bases teóricas dessa ciência, por matemáticos de renome , como Monteiro (1963).

Esse autor apresenta uma definição hermética para a multiplicação[1] m.n em N. De forma mais explítita, ela equivale a:

1.n = n
2.n = 1.n + n
3.n = 2.n + n
4.n = 3.n + n
....
m.n = (m-1).n + n

Observando, podemos constatar que essa definição recai em uma soma de parcelas repetidas, e representa o caso mais comum de multiplicações nos anos iniciais. Portanto, há infinitos exemplos de multiplicações que são somas de parcelas iguais.

Tomemos um exemplo quando o primeiro fator é igual a 5.

1 Como toda operação entre naturais, trata-se de uma função de NxN em N, que associa, portanto, a um par de números naturais um número natural.

5 x 3 = 4 x 3 + 3 = (3 + 3 + 3 + 3) + 3 = 12 + 3 = 15

O primeiro fator replicou o segundo até ter 5 cópias dele, depois somou todas.

Fazendo incursões além dos números naturais

Repare que,nos casos a) e b), o segundo fator poderia ser um número não natural, e a definição funcionaria do mesmo modo, Por exemplo, poderia ser ½ , assim como poderia ser ¾, 4/6 etc.

1x ½ = ½

5 x ½ = ½ + ½ + ½ + ½ + ½ = 5/2

Esse último caso também recai em uma soma de parcelas iguais.

Isso ocorre sempre que o primeiro fator é um número natural maior ou igual a 2.

c) Ampliação do segundo fator:

Ocorre quando o primeiro fator é um número maior que 1 (por exemplo: 1,5 – 2 – 3...).

No caso de 2, 3, 4, 5 (números naturais), recai-se em casos já vistos, como nas multiplicações 5 x 3 e 5 x ½, em que há soma de parcelas repetidas, mas é também uma ampliação do segundo fator.

No caso de números não naturais, a multiplicação significa:

1,5 x 6 = uma vez e meia o número 6 = uma vez 6 + meia vez 6 = 6 + 3 = 9.

O operador amplia o segundo fator - 6 - para um número maior: 9.

Mas a multiplicação não é, nesse caso, uma soma de parcelas repetidas.

d) Redução do segundo fator:

Ocorre quando o primeiro fator é um número não natural e menor que 1 (por exemplo: 0,5).

Vamos efetuar a multiplicação:

0,5 x 6 = meia vez o número 6 = 3.

O operador reduz o segundo (6) para um número menor (3). Não ocorre uma soma de parcelas repetidas.

Em resumo:

Uma multiplicação será uma soma de parcelas repetidas, se o primeiro fator for um natural maior que 1.

Uma multiplicação, em geral, é o resultado do primeiro fator operando sobre o segundo, de modo a aumentá-lo, mantê-lo ou reduzi-lo.

A sequência de aprendizagem com os itens *adição*, seguido de multiplicação, que considera a *multiplicação* como uma soma de parcelas repetidas, passou a ser olhada enviezadamente e foi abolida dos PCN. Porque os elos mais fortes entre a adição e a subtração passaram a ser priorizados, em Matemática e na aprendizagem, não só no sentido de operações inversas, como tão propalado pela Matemática Moderna, mas também pelas situações descritas por Vergnaud (Caderno 4 – PNAIC) no campo aditivo, que envolvem essas duas operações.

Em alguns casos, a estratégia de ensino passou a ser organizada a partir da crença de que o campo aditivo precisava ser totalmente compreendido antes que situações do campo multiplicativo fossem introduzidas, mas isso pode trazer prejuízos a aprendizagem.

Por exemplo, uma situação do campo aditivo do tipo: *Dado o valor A, soma-se um valor desconhecido, e obtém-se C. Qual foi o valor adicionado a A?* (Trata-se de uma situação aditiva, mas que será resolvida por uma subtração).

Nessa situação, pode-se imaginar que alguém tinha certo valor conhecido na carteira, ganhou um tanto mais de dinheiro, verificou com quanto ficou, e quis saber qual o valor do dinheiro ganho. Ou resolveria por tentativa e aproximações, ou aprenderia que uma subtração (valor final menos valor inicial), daria o valor desejado.

Do ponto de vista da aprendizagem, a questão que se põe é clara: o que é mais fácil para a compreensão da criança, ou o que ela aprende primeiro: saber resolver essa situação ou uma outra, do tipo multiplicativa, tal como: conhecer o preço de um chiclete e calcular o preço de 6 chicletes? Portanto, é aconselhável que o professor misture e introduza gradativamente situações aditivas e multiplicativas, conforme façam mais sentido nos cotidianos dos alunos e estejam mais ao alcance de suas capacidades cognitivas. No Distrito Federal, é possível seguir a organização curricular do *Currículo em Movimento*.

Algoritmos: prontos para memorização ou construídos com compreensão?

Atualmente, é público e notório o discurso divulgado, por grande parte de especialistas, de que um dos grandes problemas na rejeição dos alunos à matemática reside no fato de ela surgir como um conjunto de conhecimentos *prontos e acabados*, que os alunos devem assimilar sem discussão, apesar de gerarem muitas dúvidas, por serem dados sem explicações ou construções lógicas. É o caso do ensino de algoritmos – procedimentos usados para obter o resultado das operações – que, ensinados por meio de regras e passos, geram dúvidas como: *Porque, no algoritmo da multiplicação entre números de dois algarismos, recua-se uma casa em certo momento? E porque é possível fazer a soma das parcelas obtidas, mesmo sem estarem alinhadas, na casa das unidades? Porque a divisão de frações se faz por uma multiplicação e a inversão do divisor?* Enfim, uma lista interminável de indagações.

Em contraposição a esse tipo de ensino, Serrazina (2003) cita que, na vida de todos os dias, o recurso aos algoritmos tradicionais é cada vez menos importante e apela mais à capacidade de estimar e de calcular de modo flexível. E que, para isso, é preciso criar condições que permitam às crianças desenvolver, elas próprias e desde o início da escolaridade, os *instrumentos* que lhes permitam inventar, formalizar e flexibilizar progressivamente métodos e técnicas de cálculo adequados à resolução dos problemas colocados pela vida de todos os dias.

Ela lembra que, quando os professores do 1º ciclo tentam modificar a sua prática de acordo com essas condições, podem surgir, pelo menos, três conflitos:

Como faço, se:

- os livros didáticos quase não têm esta perspectiva?
- os pais consideram que ensinar matemática é ensinar as contas?
- a formação de professores não tem contribuído para suprir essas exigências?

Serrazina concorda com a questão dos livros, e argumenta que é necessário ao professor questionar a qualidade dos manuais, discutir o que deve ser o manual e ter uma atitude crítica sobre eles. Considera ser normal os pais terem uma concepção da matemática conforme era nos seus anos de escolaridade, e argumenta ser necessário conversar com eles sobre o que se pretende com o ensino da matemática hoje, de forma que tomem consciência das competências que se pretendem desenvolver. Sobre a formação inicial, afirma que é preciso continuar a formação quer pela reflexão e discussão com os colegas sobre o que se passa nas salas de aula, quer pela participação em ações de formação mais formais.

Como algumas das reflexões finais, ela coloca

> [...] se queremos desenvolver [...] "a aptidão para efectuarcálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando acalculadora, bem como para decidirqual dos métodos é apropriado à situação" não podemos continuar a trabalhar apenas os algoritmos. [...] os algoritmos continuam a ser introduzidos aos alunos muito cedo não lhes dando oportunidade para desenvolvero sentido do número e pensar deum modo crítico sobre o sentido dasoperações, tendo como conseqüência o não desenvolvimento de outrasestratégias de cálculo. (SERRAZINA, 2003, p.00)

Nossa decisão por introduzir caminhos alternativos para a construção dos algoritmos deve-se às argumentações teóricas já apresentadas e também a um fator bastante observado por nós.

Nos procedimentos matemáticos aprendidos sem compreensão, é comum os alunos depararem-se com impasses, pois há muitos detalhes a serem memorizados, e pequenas falhas de memória levam a erros ou bloqueios. Na aprendizagem com compreensão, o aluno dispõe de uma visão da situação e de como está encaminhando a sua solução, e isso lhe dá recursos para contornar essas dificuldades, pensando em alguma estratégia para resolver o impasse momentâneo.

Construção do algoritmo da multiplicação: apesar da riqueza da discussão teórica encontrada em Serrazina e outros especialistas, não é comum surgirem propostas práticas que mostrem como essas ideias podem ser desenvolvidas em sala de aula.

Nesse caderno, apresentaremos exemplo de possibilidade para isso, com estratégias próprias ou mediadas de cálculo e ideias para a evolução didática no rumo dos algoritmos formais.

Um exemplo possível para construir o algoritmo da multiplicação – subsídio para Sequência Didática.

Mesmo antes de saberem processos formais de multiplicação, as crianças reagem de modo muito livre e muito lógico a propostas do tipo:

Você quer comprar 4 livros. Cada um custa 12 reais.
Quanto de dinheiro você precisa?

São frequentes, por exemplo, soluções do tipo:

10 + 10 + 10 + 10 = 40

2 + 2 + 2 + 2 = 8

40 + 8 = 48

O professor deve qualificar as ideias apresentadas pelos alunos, ressaltando o pensamento multiplicativo desenvolvido: "Vocês pensaram muito bem e acertaram! O que vocês fizeram foi calcular 4 vezes a quantia 12 reais".

É importante que, ao construir o algoritmo, o professor faça uma ponte entre o raciocínio dos alunos e o modo sistematizado.

Professor: um material sugestivo é o quadro com várias pregas. Você pode usar quatro delas para representar, em cada uma, uma nota de 10 e uma de 2 reais.

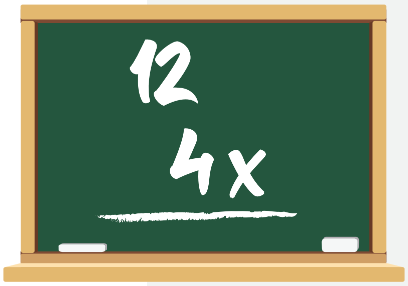
Permita que os alunos contem, de algum modo, o total.

Em seguida, contar por coluna:

Mostrando a última coluna: temos *4 vezes 2 reais, são 8 reais. Na outra coluna temos 4 vezes 10 reais, são 40 reais.*

Basta por o 4 junto do 8, já ficam 48.

Esse início de correlação pode ser seguido da informação sobre o modo como os adultos operam ou um jeito que a maioria das pessoas adultas têm, para fazer e representar esse cálculo: (se os pais lhes apresentarem o mesmo, dirão que já o conhecem).



Deve ser lido de baixo para cima: 4 vezes 12.

Começam pensando que 12 reais é uma cédula de 10 e mais 2 reais. Para ter 4 vezes essa quantia, precisam ter:

4 vezes uma cédula de 2 reais
(mostra no algoritmo e diz 4 x 2 = 8. Escreve o 8).

4 vezes uma cédula de 10
(mostra no algoritmo o 4, e diz 4 x 1 = 4. Escreve o 4).

Em sala de aula, após resolver um algoritmo desse modo, é aconselhável ter uma conversa com os alunos. *Será que esse jeito ficou certo? Foi um jeito certo de pensar? Todos concordam que o 1 representa a nota de 10 e o 4 indica 4 notas de 10?* É importante aguardar respostas e argumentar, sem autoritarismo e evitando dizer: *Não, assim está errado.* Afinal, queremos que eles desenvolvam autonomia de pensamento, e para isso eles devem externar suas dúvidas e terem respostas coerentes para elas.

De modo análogo, pode ser proposta a questão (com reserva):

Se você quiser comprar 5 livros de 12 reais, de quanto vai precisar?

Para ter 5 vezes a quantia 12, precisamos ter:

5 vezes 2 reais (mostra no algoritmo e diz 5 x 2 = 10).

Isso é igual a uma nota de 10 e nenhuma moeda.

Então deixamos o 0 (zero) na coluna das unidades de reais, e colocamos 1 sobre a coluna das notas de 10, para indicar que temos mais uma nota de 10, que será acrescentada ao cálculo da coluna.

5 vezes a nota de 10 (mostra na conta o 5, o 1, e diz são 5, mas tenho mais uma que marquei na reserva. Soma e escreve 6, obtendo 60).

Em situações como essas, é interessante deixar que os alunos resolvam como quiserem. Só então, será importante encaminhar para o desenvolvimento acima, que registra a reserva.

Uma nova situação-problema:

Quantos lápis existem em 12 caixas com 24 lápis em cada uma? Também nessa situação mais complexa, aconselha-se deixar os alunos procuraremm soluções próprias, que podem vir sob várias formas:

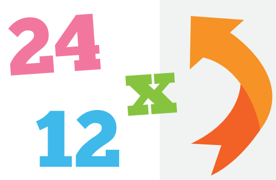
24 + 24 = 48		48	ou	24	144 + 144 = 288
		48		24	
	+	48	+	24	
		48		24	
		48		24	
48 24					
		288		144	

Na primeira, contaram as 12 caixas de duas em duas, formando 6 pares de caixas. Calcularam a quantidade em um par, que é 48, e depois somaram seis vezes a quantidade 48. Na segunda, somaram inicialmente seis vezes a quantidade 24 (apenas metade das caixas) e dobraram o resultado obtido.

Esses procedimentos são muito úteis, pois correspondem aos cálculos mentais que se faz no dia a dia, e o professor deverá apoiá-los. O professor poderá dizer que há ainda outros modos de serem feitos.

Multiplicações por 10: serão um ponto de apoio importante nos cálculos multiplicativos. Expostos a situações envolvendo cédulas monetárias ou outras, os alunos já vão conhecendo certos resultados: 2 x 10 = 10 x 2 = 20; 4 x 10 = 10 x 4 = 40; 5 x 10 = 10 x 5 = 50, 10 x 10 = 100. Manipulando material ou fazendo adições, eles deverão calcular 10 x 7, 10 x 9, 10 x 12. Depois de colocar todos esses resultados no quadro de giz, o professor anuncia que vai pôr mais uma multiplicação envolvendo 10 (por exemplo, 10 x 14) e quer saber se alguém vai dizer o resultado, sem fazer cálculos escritos.

Se os alunos já tiverem observado a regularidade dos resultados, dirão que basta colocar um zero no fim do 14 (será bom pedir que eles mostrem que isso é verdade). Se ainda não perceberam, deixar que calculem, por somas – 10 parcelas de 14, ou pegando material – 10 grupos de 14 palitos (por exemplo), ou por desenhos – poderá ser representando 10 vezes 14 risquinhos.



Usando a multiplicação por 10:

Lembrar que lemos 12 vezes 24. Temos que calcular 12 vezes 24 lápis. Podemos calcular 2 vezes e depois mais 10 vezes.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 12 \\ \hline 48 \end{array}$$

Eles já sabem como calcular 2 x 24, mesmo nesse algoritmo conta. (2 x 4 = 8, 2 x 2 = 4) Ficamos com: 48 .
Lembrar que aquele 2 na linha superior significa 20 lápis.
E que o 4 que colocamos embaixo representa 40.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 12 \\ \hline 48 \\ 240 \\ \hline 288 \end{array}$$

Falta ainda calcular 10 vezes os 24 lápis.

Mas isso eles já sabem quanto dá: 240. Colocam o número (incluindo o zero) e somam as parcelas.

É recomendável colocar a segunda parcela (240) sem omitir o zero final, por várias razões. Primeiro, o algoritmo fica mais compreensível para o aluno. Além disso, muitos alunos estranham que se faça uma adição sem que os algarismos finais estejam alinhados (não compreendem que o último algarismo foi omitido, por ser zero).

Um passo a mais: veja um modo de dar sentido, inicialmente, à multiplicação 21 x 24:

Inicia marcando 1 x 24 = 24

Para calcular ainda 20 vezes os 24 lápis, o professor calcula primeiro 10vezes, e depois mais 10 vezes.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 21 \\ \hline 24 \\ 240 \\ 240 \\ \hline 504 \end{array}$$

A passagem ao modo reduzido de operar.

No modo de operar que apresentamos, o aluno já está bem próximo do modo como é usualmente feita a multiplicação:

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 21 \\ \hline 24 \\ 480 \\ \hline 504 \end{array}$$

Nesse modo usual, as duas parcelas de 240 foram substituídas por uma única de 480.

Entretanto, por mais próximos que estejam desse modo de operar, muitos alunos do 4º ano apresentam certa dificuldade e relutam em fazer a passagem, com compreensão, para essa forma. A dificuldade está no cálculo de 20 x 24 para obter 480.

Nesse ponto, duas alternativas se oferecem:

1) Apresentar ao aluno o procedimento sistematizado: multiplicar 2 por 24, obtendo 48, e, lembrando que essa multiplicação deve ser por 20, multiplicar em seguida por 10, obtendo-se 480. Podemos fazer o aluno ver que isso dá um resultado verdadeiro. Embora não compreendendo claramente o processo, os alunos percebem que esse jeito reduzido de operar conduz a resultados verdadeiros.

2) A segunda alternativa seria a dos alunos continuarem operando pelo processo longo no 4º ano, deixando para o 5º ano a inferência do algoritmo universal, quando, talvez pelo próprio período de maturação, as crianças demonstram mais facilidade em inferi-lo, ou, pelo menos, compreendê-lo, como já feito.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 21 \\ \hline 24 \\ 240 \\ 240 \\ \hline 504 \end{array}$$

Entre os vários modos que aparecem, dos alunos e os mediados pelo professor, aconselha-se detectar quais procedimentos são mais frequentemente utilizados pelas crianças, em cada ano escolar, e promover certa socialização e sistematização dos mesmos na sala de aula. Esse processo é chamado de sistematização ao nível da sala de aula. Pode-se observar em que anos os algoritmos de sistematização universal chegam a apresentar significado e possibilidade de compreensão pelas crianças – o que, de modo geral, só ocorre em anos posteriores àqueles em que são usualmente ensinados.

Professor: mesmo após ensinar o algoritmo formal, não tenha pressa que todos aprendam esse formalismo, nem exija que os alunos abandonem seus processos pessoais. Na verdade, fazendo isso, a escola tolhe o raciocínio das crianças, impedindo-as de desenvolver seu cálculo mental e obrigando-as a adotarem um processo que muitas vezes não compreendem.

Divisão: abrangência conceitual, situações-problema gerando ideias e procedimentos. A construção dos algoritmos

Ao trabalhar com a divisão, voltaremos a desenvolver as percepções sobre dois tipos de divisões, cujos nomes só interessam ao professor. Outra questão que a aprendizagem da divisão explora pouco é a do resto. Ele não existe nas divisões exatas associadas a uma multiplicação, mas consideraremos agora situações em que ele aparece.

Divisão partitiva ou de partilha

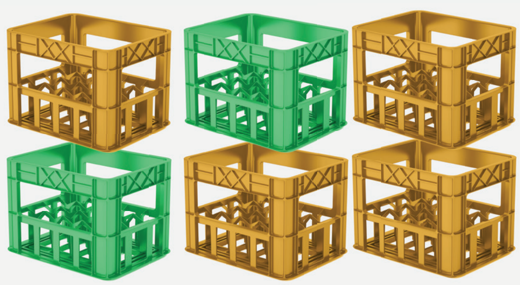
Lembramos que, quando se tem certa quantidade e se quer distribuir igualmente para pessoas, ou pratos etc., a divisão é chamada partitiva. A resposta que se procura é: quanto deu para cada pessoa, ou para cada prato?

9 minions para distribuir igualmente entre 3 crianças.
Quantos minions para cada uma?

Divisão quotitiva

Já quando se tem certa quantidade e se quer separá-la em partes de tamanho pré-fixado, a divisão é chamada quotitiva (separação em quotas) ou de medida. A resposta que se procura é: quantas partes (ou quotas) são obtidas? Ou: quantas vezes cada parte cabe no todo?

24 refrigerantes para preencher engradados de 6 refrigerantes.



Quantos engradados serão usados?

Por meio de situações problemas, vamos explorar ideias, registros possíveis e chegar aos algoritmos.

Situações verbalizadas ou escritas iniciais com desenhos

Existem situações, apresentadas na apostila Numerização, de Guidi e Bertoni, produzida no Departamento de Matemática da UnB, no âmbito do projeto Um Novo Currículo de Matemática para o 1º grau, que são adequadas para serem propostas antes de qualquer introdução formal da divisão. Se o professor achar necessário, pode usá-las para consolidar a formação inicial do conceito de divisão. Para a obtenção de resultados, os alunos podem recorrer a desenhos ou materiais concretos. Por exemplo:

1) 11 velas divididas para 2 bolos.

Dão _____ velas em cada bolo.

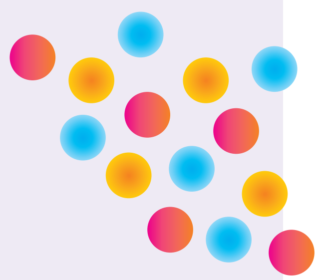
Sobra _____ vela.

O professor deverá explicar que devem por a maior quantidade possível de velas nos bolos, igual nos dois, e que talvez sobrem velas.

Articulação com a multiplicação

Após a solução das crianças, destacar que apareceram 5 velas em um bolo e 5 no outro, então são duas vezes as 5 velas, que são 10; mais uma que sobrou dão as 11 velas que eles tinham para dividir. É importante ao professor observar que a descrição significativa da situação é dada por *divisor x quociente* + resto = *dividendo*. No caso, temos 2 x 5 + 1 = 11. Isto é, o divisor aparece como primeiro fator. Isso ocorre em todas as divisões partitivas.

2) 14 bolinhas divididas para 3 alunos.



Observar que deve ser a maior quantidade possível de bolinhas para cada aluno, igual para todos, e que talvez sobrem bolinhas. Após a solução, fazer a articulação com a multiplicação: Foram 4 bolinhas para cada um dos três alunos, então apareceram 3 vezes as 4 bolinhas, que são 12; mais duas que sobraram dão as 14 iniciais (3 x 4 + 2 = 12, ou seja divisor x quociente + resto = dividendo).

Introdução da chave da divisão associada a situações já conhecidas

Expostos a situações como essas, os alunos percebem o significado e a maioria chega a resultados corretos. Após fazerem algumas situações, o professor pode apresentar a representação das mesmas no esquema usual usado para a divisão. Nesse ponto é mais importante valorizar o modo de representar e não o cálculo:

11 velas	2 bolos
Sobra _____ vela.	Dão _____ velas em cada bolo.

14 bolinhas	3 alunos
Sobram _____ bolinhas.	_____ pra cada um.

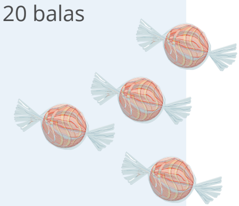
Uma próxima etapa será a supressão de algumas palavras, dizendo que podem imaginar 11 objetos quaisquer, divididos igualmente para 2 partes.

Algoritmos iniciais (livres) para as situações de partilha e de medida ou quotas: tivemos oportunidade de apresentar a crianças as situações: “Dividir 240 balas para 8 crianças” e “Com 120 balas, forme pacotes de 4 balas”. Veja alguns registros iniciais:

240 balas	**8 crianças (divisão partitiva)**
(Divisão Partitiva)	10 10 10 10 10 10 10 10 80 10 10 10 10 10 10 10 10 80 160 10 10 10 10 10 10 10 10 80 240

Os alunos desse grupo deram inicialmente 10 balas e depois mais 10 para cada criança; viram que haviam gasto 160; deram mais 10 para cada uma e viram que gastaram todas (240). Somaram os 10 e viram que deu 30 para cada aluno. Podem efetuar 8 x 30 e ver que o resultado é 240.

120 balas	**Para formar pacotes de 4 balas**
(Divisão Quotitiva ou de medida)	10 pacotes = 40 balas 10 pacotes = 40 balas 10 pacotes = 40 balas 30 pacotes = 120 balas



Os alunos de um grupo formaram inicialmente 10 pacotes, gastando 40 balas; formaram mais 10 e mais 10, e somaram tudo, dando as 120 balas. Viram que deu para formar 30 pacotes. Verificando: 30 pacotes, com 4 balas em cada, são 30 x 4 = 120.

Desenhando todos os participantes em uma divisão: você percebeu, no registro, o desenho das 8 carinhas de crianças que vão ganhar balas? Foi uma estratégia inventada por alunos, e logo aceita pelas outras. Ao fazer partilhas, as crianças gostam de representar todas as pessoas ou partes envolvidas. Isso lhes dá um controle da situação – vêem todos os que vão receber, o que cada um está recebendo, quanto do todo já foi gasto e quanto resta. Mais tarde, marcarão apenas uma.

Do mesmo modo que em outras operações já exploradas, esses processos não são ensinados a *priori*, mas são organizados depois dos registros livres dos alunos. Eles contribuem realmente para o desenvolvimento do raciocínio, pelo uso da tentativa e de uma compreensão clara da situação.

O uso de material concreto simbólico: prós e contras

As duas situações de divisão apresentadas pertencem ao contexto cotidiano e, para resolvê-las, os alunos fizeram uso apenas da reflexão sobre a realidade. Não foi utilizado material concreto.

Será que o uso de material concreto ajuda sempre? Claro que pegar 12 palitos e dividi-los por 4 crianças é uma ação bem clara. Para números maiores, como no caso de 240 balas para 8 crianças, pode ficar complicado pegar 240 palitos. Pegar um material *representacional*, como material dourado, pode ser um facilitador aparente, mas também pode ser um afastamento da realidade – como ver balas nas placas ou barrinhas? Seu uso requer cuidados, para que uma realidade possa ser imaginada e vista através da representatividade abstrata. Pensar diretamente em distribuir as balas, controlando a distribuição, é mais real. Ou usar o dinheiro de mentira, se a situação envolver quantias.

Devemos novamente refletir sobre o que ocorre com os algoritmos formais, que são impostos aos alunos, sem fazer sentido para eles. Tornam-se responsáveis por boa parte das dificuldades sentidas pelas crianças no processo de divisão usual da escola. Ao contrário, quando as crianças tomam parte na construção, raciocinando diretamente sobre a realidade ou fazendo uso adequado de material manipulável, suas dificuldades diminuem.

Divisões com dinheiro: dinheiro é uma exceção entre os materiais manipuláveis, pela sua forte presença social. Seu uso em divisões leva a vários cálculos mentais e representações alternativas. Devem ser feitas inicialmente com dinheiro de mentira (cédulas e moedas). Possibilitam a representação do raciocínio do aluno, de maneira livre.

24 reais	2 crianças
Sobram ____ .	____ para cada um.

Se um aluno pega duas notas de 10 reais e quatro moedas de 1 real para dividir entre duas crianças, percebe que cada uma deve receber uma nota de 10 e duas moedas de 1 real. Já pode preencher os epaços deixados para resposta na questão: 12 para cada uma e sobra 0.

Mesmo em situações com aparente dificuldade, o dinheiro é um bom recurso para obter soluções:

32 reais	2 crianças
Sobram ____ .	____ para cada um.

Uma solução encontrada foi:

32 reais	2 crianças
	Para cada um: 1 de 10 (gasto 20) 1 de 5 (gasto 10) 1 de1 = (gasto 2)
Sobram 0.	16 para cada um.

A explicação foi: *3 notas de 10, dá uma para cada um e sobra uma; divide essa nota pra dois e dá 5 pra cada um; divide os dois reais e dá 1 pra cada um. Cada um recebe 10 + 5 + 1 = 16 reais.*

Essa etapa de propostas de situações e soluções livres pelas crianças pode durar cerca de um ou até dois bimestres, trazendo muito raciocínio, bem como confiança e prazer. Tem a vantagem de o 0(zero) intercalado não representar um problema – o aluno divide o que tem, em qualquer ordem, e no fim soma.

No caso abaixo, deve ser estimulado a reconhecer, inicialmente, que tem para dividir: 8 cheques de 1000, 2 cédulas de 100, nenhuma de 10 e 5 de 1 real (recurso ao dinheiro simulado ou decomposição). Fazendo a distribuição, saberá o que cada um vai receber:

8205	4
Sobra 1.	2 de mil, 1 de 50, 1 de 1 para cada um.

Podiam ocorrer casos mais difíceis:

7204 reais (7 de 1000, 2 de 100 e 4 moedas de 1)	**3 crianças**
7 de 1000	2 de mil para cada uma
Sobra 1000	3 de 100 para cada uma
Sobra 100. Junta com mais duas de 100 e dá mais uma de 100.	1 de 100
Tem 4 de 1 real. Dá uma para cada um e sobra 1.	1 moeda de 1 real 2 mil 400 e 1. Deu 2401 pra cada um.

Além de desenvolver cálculos mentais, essas estratégias permitem ao aluno compreender o que ele busca no processo de divisão. Como pode haver alguns resultados distintos, os alunos querem saber se acertaram. Uma saída para o professor é dizer: Você mesmo pode ver se acertou: soma o dinheiro que cada um ganhou mais o que sobrou e vê se dá o que tinha para dividir.

A validação pela estimativa é importante: o professor pode questionar, por exemplo, se não poderia ter dado 3.000 para cada um (não, porque só aí teria gasto 9000); ou por que não chegou a 2500 para cada um (3x2000=6000, 3x500 = 1500, somando daria 7500, mas não tinha essa quantia) levando a uma melhoria do cálculo mental e estimativas.

A construção flexível de algoritmos da divisão

São dois processos mais usuais da divisão – *um de trocas ou junções no sistema decimal*, outro *por subtrações sucessivas*.

Algoritmo das trocas decimais (Múltiplas formas): esse algoritmo faz mais sentido em situações de partilha. Embora possa ser usado em situações quotitivas, a associação dos procedimentos adotados com o objetivo de formar quotas fica mais obscuro. Veremos também que as trocas e junções (de centenas e dezenas, ou dezenas e unidades) que fazemos com desembaraço, ainda que possam ser parcialmente compreendidas pelas crianças, muitas vezes lhes parecem complicadoras e dispensáveis.

Propomos que comecem com situações-desafio:

Quem calcula primeiro?
112 reais divididos igualmente para duas crianças.

As soluções mais comuns já foram apresentadas: corresponde a ir pegando cédulas e fazendo a distribuição, registrando em coluna sob o divisor o que cada um recebe e fazendo uma soma para obter o quociente.

A mediação para o algoritmo mais usual implica a junção de valores (casas do dividendo) começando por juntar o 1 inicial com o seguinte, obtendo 11. Podemos lembrar que serão 11 cédulas de 10 para serem distribuídas.

Essas tentativas podem falhar, pelo fato de as crianças acharem algumas passagens desnecessárias e as recusarem. Percebem que a divisão de 11 por 2 não dará exata, dará 5 e sobrará novamente a cédula de 10.

Então acham melhor pegarem e trocarem apenas a de 100, dando logo 5 de 10 para cada um. Irão marcar 50 ou 5 de 10 para cada um. Visando a construção progressiva do quociente, o professor pode sugerir que marquem *5* e *de 10* sob ele. Fazem um traço sobre o primeiro 1, indicando que ele já foi dividido.

Ao verem que ainda têm uma cédula de 10 e duas moedas de 1, aceitam pensar em 12 reais – aqui a junção decimal será bem-sucedida (evitar a expressão *abaixo o 2*, que não tem significado para a criança). E 12, dividido igualmente para 2, dá 6 moedas de 1 para cada um. Marca 6 e embaixo, pequeno, escreve *de um*. A tendência é, novamente, de cortarem o 12 indicando que já foi dividido. O professor pode sugerir, em vez do corte, algo que, na visão das crianças, parecerá desnecessário: registrar os 12 que foram distribuídos e fazer a subtração para indicar quantas moedas de 1 sobraram.

~~1~~12	**2**	
12	5 (de dez)	6 (de um)
-12		
0		

É um modo de mediar para o aparecimento do quociente como um número já formado, na horizontal. Contudo, alertamos para passos não naturais que impomos às crianças, como impor pegar 11 inicialmente. Nessa fase escolar, elas se perdem nesses passos impostos e cometem frequentes enganos, por não saberem por que e para que devem agir do modo ensinado.

Um alerta: se algum jogo eletrônico mais tosco exigir das crianças passos desse tipo, elas vão logo protestar com uma careta de desdém: Dêrrr...

Do mesmo modo, 112 chicletes para 2 crianças pode ser resolvido pela distribuição sucessiva de 100 ou dez grupos de 10 entre as duas , e depois de 12 entre as duas.

Algoritmo das subtrações sucessivas: esse algoritmo é bem apropriado para as situações quotitivas ou de medida – ou seja, formar partes de tamanho predeterminado e contar quantas foram formadas. Entretanto, com uma verbalização adaptada, ele pode ser entendido para a situação de partilha. Em vários países, é desenvolvido como um algoritmo escolar. Também pode ser proposto como desafio.

Com 112 chicletes, preencher caixinhas com 2 chiquletes.
Quantas caixinhas serão cheias?

Após diferentes raciocínios dos alunos, podemos propor diferentes formas de registro no esquema da chave da divisão.

Por exemplo, podem pensar:

Para encher 10 caixas, vou precisar de 20...
Para encher mais 10, preciso de mais 20...

Nesse caso, o esquema ficaria:

112 chicletes	Para encher caixinhas com 2
20 chicletes	10 caixinhas (encher 10 caixinhas implica em gastar 20 chicletes)
20 chicletes	10 caixinhas
40	
20 chicletes	10 caixinhas
60	
20 chicletes	10 caixinhas
80	
20 chicletes	10 caixinhas
100	
10 chicletes	5 caixinhas
110	
2 chicletes	1 caixinha
112	56 caixinhas

Vamos interpretar as somas realizadas acima, à esquerda. Embora a ideia seja de tirar chicletes e preencher caixinhas, eles poderão, em um momento inicial, em vez de fazer cada subtração do que já foi tirado, fazer somas, indicando o total já retirado, até chegar em 112.

Entretanto, esse algoritmo também pode ser usado, com compreensão, no caso de divisão como partilha. Basta adaptar o pensamento para o que se quer na situação. Por exemplo, se queremos dar 112 chicletes para 2 crianças, posso registrar em um algoritmo de subtrações, com raciocínio adequado.

Pensamento:

Dou 10 para cada um, uso 20...
Dou mais 10 para cada um, uso 20...
Somo e vejo que já usei 40.

112 chicletes		Para 2 crianças
20 chicletes	←	10 (dá 10 chicletes para cada uma, usa 20 chicletes)
20 chicletes	←	10 (dá mais 10 para cada uma, usa 20 chicletes)
40		Já gastou 40 chicletes
20 chicletes	←	10 (dá mais 10 para cada uma, usa 20 chicletes)
60		Já gastou 60 chicletes
20 chicletes	←	10 (dá mais 10 para cada uma, usa 20 chicletes)
80		Já gastou 80 chicletes
20 chicletes	←	10 (dá mais 10 para cada uma, usa 20 chicletes)
100		Já gastou 100 chicletes
10 chicletes	←	5 (dá mais 5 para cada uma, usa 10 chicletes)
110		Já gastou 110 chicletes, agora só tem 2
2 chicletes	←	1 (dá mais 1 para cada uma, usa 2 chicletes)
112		Deu 56 chicletes para cada uma

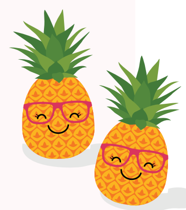
A sequência de quanto vão dando a cada criança pode variar, não havendo uma ordem fixa.

No caso da divisão de 112 reais, o resultado foi obtido mais rapidamente. Uma metodologia adequada é trabalhar ambos – o de decomposição decimal, com junções plausíveis, e o das subtrações sucessivas - sem exigir o domínio dos dois. As crianças percebem que ambos conduzem ao mesmo número (com interpretações diferentes nas respostas), e que, portanto, podem recorrer a qualquer um deles. Algumas preferem o primeiro, outras, o segundo. Com o tempo, mesmo o segundo, que parece longo, vai sendo otimizado, evoluindo para o algoritmo usual, quando o aluno percebe que pode dar logo 50 e depois mais 6 a cada criança, e registra no quociente: 5 (de 10) e 6.

Situações multiplicativo-aditivas

Vergnaud (1994, p. 46) introduz a noção de campo conceitual multiplicativo como um feixe de situações e um feixe de conceitos, explicitando que “um conceito é tornado significativo por meio de uma variedade de situações, e diferentes aspectos do mesmo conceito e operações são envolvidos em diferentes situações". Sua teoria dos Campos Conceituais distinguiu o campo aditivo e o campo multiplicativo, e ele apresentou tipos de situações associadas a cada um dos campos.

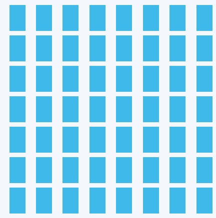
Situações associadas à estrutura multiplicativo-divisivas:

Associadas a situações comparativas	
Multiplicação: Pedro tem 5 reais e Lisa tem o dobro dessa quantia. Quanto tem Lisa?	 10 reais
Situação de divisão correspondente: Lisa tem 10 reais. Ela tem o dobro da quantia de Pedro. Quanto tem Pedro?	 Na situação anterior, foi necessário dobrar a quantia de Pedro. Nesta situação, é necessário separar a quantia de Lisa em duas iguais.
Associadas à comparação entre razões (envolvendo proporcionalidade)	
Multiplicação: Dois abacaxis custam R$ 2,50. Qual o preço de 4 abacaxis? (Note que se pode obter primeiro o preço unitário, mas isso não é necessário.)	4 custam o dobro do preço de dois. 4 custam R$ 5,00. 
Situação de divisão correspondente: Marta pagou 24 reais por 3 latas de biscoito. Quanto custou cada lata? Observação: divisão como partilha, isto é, separação de 24 reais em 3 partes iguais. Luís gastou 18 reais comprando vários pacotes de biscoito que custavam 3 reais cada um. Quantos pacotes ele comprou? *Observação: divisão como formação de grupos ou medida; procura-se saber quantas vezes o 3 cabe em 18.*	Precisamos separar os 24 reais em 3 partes iguais, o que pode ser feito por tentativa: 5 + 5 + 5 = 15 (não dá 24), 6 + 6 + 6 = 18 (não dá 24). Juntando 2 a cada 6 reais: 2 + 2 + 2 = 6 24 ⟶ Agora deu 24 reais. Cada pacote custou 6 + 2 = 8 reais. Por tentativa: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 (5 pacotes não dão 18 reais). Pondo mais um pacote: 15 + 3 = 18. **São 6 pacotes.**

Associadas a arranjos retangulares

Multiplicação:

Num auditório, as cadeiras estão arrumadas em 7 fileiras e 8 colunas. Quantas cadeiras há no auditório?



Um desenho do auditório, com as fileiras e colunas, permite a solução do problema.

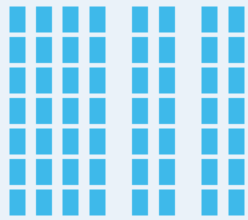
Situações de divisão correspondentes:

As 56 cadeiras de um auditório estão dispostas em fileiras e colunas. Se são 7 fileiras, quantas são as colunas?

(O aluno poderá fazer por tentativa:

Pondo só 4 cadeiras em cada fileira, seriam 28 cadeiras.

Pondo mais duas em cada fileira, já são 42. Pondo mais duas novamente, chegará ao total 56.)



28 + 14 = 42 42 + 14 = 56

4 colunas são 28,

6 colunas são 42.

8 colunas são 56.

Associadas à ideia de combinações

Multiplicação:

Tendo duas saias (preta e branca) e três blusas (rosa, azul e cinza), de quantas maneiras diferentes posso me vestir?

saia preta
- blusa rosa
- blusa azul
- blusa cinza

saia branca
- blusa rosa
- blusa azul
- blusa cinza

6 modos diferentes.

Situações de divisão correspondentes:

Numa festa, foi possível formar 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 moças e todos os presentes dançaram, quantos eram os rapazes?

Temos: Moça 1, Moça 2 e Moça 3.

Se forem 2 moços, serão 6 casais.

Se forem 3 moços, serão 9 casais.

Se forem 4 moços, serão 12 casais.

Eram 4 rapazes.

Professor: Não desanime. Queremos ser pensante, atuante, criativo, lembra-se? E travessia tem mesmo suas dificuldades. Você encontrará modos de enfrentá-la.

Números fracionários ou racionais positivos

Comparando a construção dos números naturais e fracionários pelas crianças

As crianças têm, aproximadamente a partir de dois anos, vivências gradativamente crescentes com quantidades contáveis, as quais podem ser expressas por um número natural. A iniciação aos números naturais ocorre, assim, no contexto da contagem de coleções de objetos inteiros, compreendendo a manipulação e desenho de unidades como tampinhas e palitos. O conceito de número fica articulado ao que há de comum em coleções de mesma cardinalidade, às quais é atribuído um número, que é uma característica quantitativa da coleção, acompanhado de sua representação gráfica.

Gradativamente, ao longo dos primeiros anos, as crianças evoluem nessa contagem de objetos, nas próprias brincadeiras e na vivência familiar, com maior ou menor precisão e entendimento, o que já lhes dá um contexto de existência de números, que se articulam à avaliação de quantidades. Essas experiências serão importantes se devidamente aproveitadas no processo escolar de alfabetização matemática. O ensino infantil e o ciclo de alfabetização vão clarear e avançar esse conhecimento dos números naturais.

Então, no 4º ano, com cerca de nove anos, as crianças são introduzidas a algo denominado frações. A esse respeito lançamos as seguintes indagações e reflexões:

> A criança teve experiências anteriores, no contexto quotidiano, envolvendo frações?
>
> A criança teve experiências anteriores que lhe dessem a percepção de outros números além dos naturais?
>
> Houve situações que possibilitaram à criança articular, de algum modo, esses outros números aos números naturais?
>
> A vivência e a escola estão propiciando uma construção correta do conceito de frações?
>
> **Sugerimos pensar, escrever e socializar a respeito.**

O salto abrupto para as frações

Uma primeira diferença entre a aprendizagem de frações e a dos números naturais é a ausência quase total de vivências das crianças com aquelas quantidades, que aparecem, ao início, no contexto de partir a unidade em certo número de partes iguais.

Não houve uma familiarização progressiva com o tema, nem sua inclusão em brincadeiras. É claro que a maioria das crianças já viveu a experiência da divisão de um inteiro em duas partes iguais, seja uma laranja, um pedaço de bolo ou pão, ou mesmo um copo com água, e isso as prepara para a noção de metade e do número *1 meio*. Mas essas vivências param quase por aí. Ou seja, as crianças não têm, no caso das frações, a vivência prévia de experiências constantes e progressivas que possam facilitar o ensino-aprendizagem desse tópico, na escola.

Em grande número dos livros didáticos, a página que introduz o tema frações apresenta o desenho de círculos ou quadrados divididos em partes iguais, bem como os nomes das partes obtidas, e, muitas vezes, até a representação numérica. É uma realidade incomum para os alunos, que raramente tiveram necessidade de dividir quadrados ou círculos em partes iguais[2]. É verdade que talvez já tenham visto pizzas divididas igualmente. Mesmo nesses casos, a atenção esteve voltada quase somente para números naturais – *em quantas fatias a pizza veio dividida*, ou q*uantas fatias ele comeu*. Não aparecem, naturalmente, nomes das fatias.

A introdução de frações é feita, portanto, desvinculada de experiências prévias, bem como de situações significativas que demandam essa introdução.

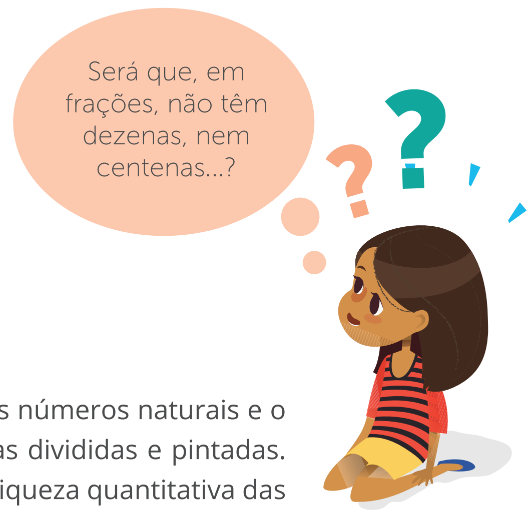
A aparente redução do universo dos números

Uma outra dificuldade é que, ao introduzir frações, os livros escolares focam, em geral, a atenção em uma figura, que passa a ser chamada de unidade, e tratam de associar um símbolo às partes nela destacadas. Essa grafia numérica parece bem estranha aos alunos - envolve dois números (é assim que os alunos vêem) separados por um traço horizontal. É explicado que o que fica abaixo do traço indica em quantas partes iguais se dividiu o objeto, e o que fica acima indica quantas partes foram tomadas. Assim, a grafia parece indicar mais um procedimento do que um número, com a característica de quantificador.

Além da estranheza do símbolo, ocorre uma aparente redução abrupta do âmbito dos números em que os alunos trabalhavam. Estavam acostumadas com uma infinidade de números naturais atingindo centenas, milhares, até milhão. Nas frações, passam a trabalhar com uma unidade e partes dela. As frações mistas, maiores que a unidade, também trazem certo obstáculo. Elas surgem com o aparecimento de situações em que dividem a unidade em certo número de partes, mas devem pegar um número maior do que as obtidas. A reação natural é dizer que é *impossível*, mas o professor se adianta e informa que basta pegar mais do que uma unidade. Desse modo, surgem situações com duas unidades, em que, além de uma unidade inteira, apenas algumas partes da segunda são consideradas. Ou incluindo até 3 ou 4 unidades, sendo que, da última, são tomadas apenas algumas partes.

2 As partes não precisam ser iguais no sentido de poderem ser superpostas (congruentes). Mas no sentido de equipotentes – no caso de figuras planas, significa que têm a mesma área. Para as crianças, *valem o mesmo tanto.*

Aparecem poucas unidades.



Não há conexão aparente entre o universo dos infinitos números naturais e o estudo de frações, que parece o estudo de algumas figuras divididas e pintadas. Na introdução dos fracionários, há uma perda de visão da riqueza quantitativa das coleções de objetos já trabalhadas e dos números associados a elas. Mesmo as frações mistas não conseguem superar essa perda.

As crianças têm dificuldade, por exemplo, em apresentar uma fração maior do que 20.

Fração: número ou parte?

Outra dificuldade é a de reconhecer fração como número. O termo fração passa a designar quase que somente partes da unidade. As crianças reconhecem os símbolos numéricos associados a essas partes como descritores do modo como foram obtidas – *dividiu em tantas, tomou tantas.* O aluno tem dificuldade em perceber esses símbolos como algo que descreve aquela parte quantitativamente, que o ajuda a contar ou avaliar sua coleção quando ela é formada de coisas inteiras e partes como essas. Portanto, tem dificuldade em situar seu símbolo numérico entre dois números consecutivos naturais, ou seja, em colocá-lo em uma reta na qual estão marcados números naturais. Não identifica o símbolo como representativo de um novo número – o número fracionário. Nem percebem bem que os números fracionários menores do que 1 podem aparecer junto a qualquer número natural. Por exemplo: 245 e 1 quarto. Consideraremos:

- **Frações (própria ou aparente):** uma ou mais partes de um todo dividido equitativamente ou sua representação numérica;
- **Número fracionário:** números que identificam frações, quantidade de unidades inteiras e quantidades de unidades inteiras misturadas a frações.

Assim, vemos várias dissonâncias entre a aprendizagem de naturais e de números fracionários:

- na natureza do objeto escolhido como unidade;
- na representação dos mesmos;
- na extensão da quantidade representada;
- na questão dos significados quotidianos.

A ampliação do conjunto dos naturais com a inclusão das frações não é destacada. Na verdade, os livros apresentam uma ruptura entre o que vinha sendo estudado nos números naturais e esse novo tema: frações. Ao começar a tratar delas, parecem esquecer dos números naturais.

Essa ruptura vai se acentuar na questão das operações entre os números fracionários, como veremos a seguir.

Há necessidade de regras para introduzir relações e operações?

O tema Frações prossegue na aprendizagem escolar, introduzindo regras para estabelecer relações entre as frações, como de equivalência e comparação; prosseguindo com outras para as operações básicas entre elas. Alguns exemplos ilustrativos surgem às vezes, no intuito de comprovar as regras. Além disso, introduz-se quantidade considerável de terminologia.

Por mais que crianças aprendam os procedimentos de associar números fracionários a figuras divididas e de regras que se diz fornecerem o resultado de operações, elas não estarão entendendo e elaborando a construção dos números fracionários, se não souberem responder perguntas como:

- Um meio, dividido por 2, quanto dá?
- Bebi metade do litro de leite e minha irmã bebeu metade do que sobrou. Quanto ficou do litro?
- Dividindo-se 10 cocadas para 6 crianças, quanto cada uma recebe, se não deixarmos sobrar nada?

Será que é necessário recorrer, a cada momento, a lápis, papel e regras para dar uma resposta (que não sabem explicar)?

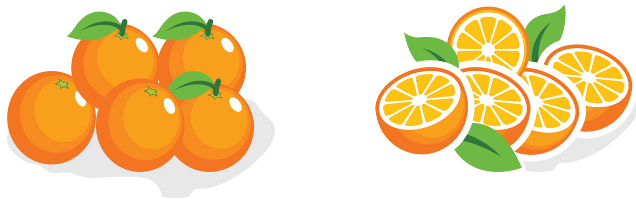
Orientações pedagógicas: possíveis caminhos para superação desses obstáculos

Por onde começar?

Há uma fração bem conhecida das crianças – a metade. Conhecem metade da laranja, do copo com água ou leite, uma pizza que é meia mussarela, meia calabresa. A mãe costuma dividir alguma coisa e dizer: é metade para você, metade para seu irmão.

Começar o estudo de frações com as metades é um bom ponto de partida.

Já é claro para os alunos que juntar duas metades corresponde a ter a coisa inteira. Então, mesmo antes de saberem a representação numérica da mesma, podemos apresentar ilustrações com várias laranjas inteiras e algumas metades, e pedir que escrevam quanto tem no total. Ou seja, já estamos rompendo com o reducionismo de começar com uma única unidade.



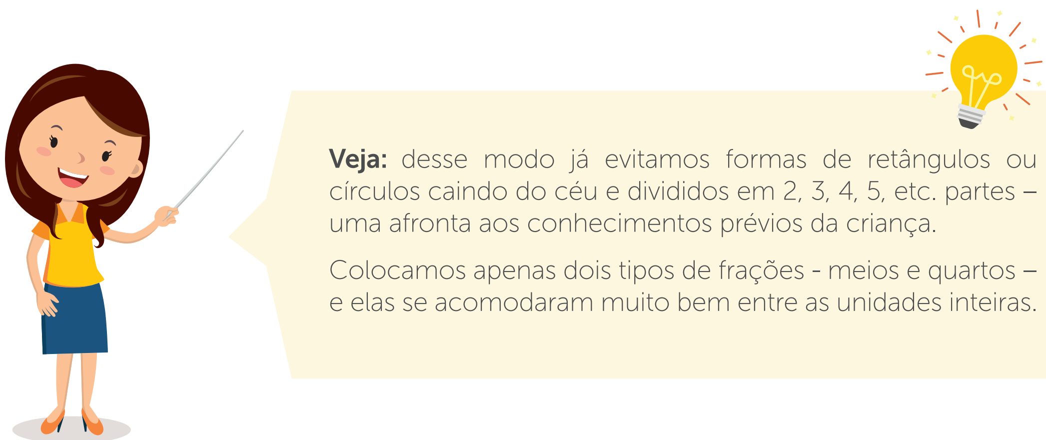
Quanto temos, ao todo?

Poderão dizer que têm 5 inteiras e 5 metades, ou, por meio da própria percepção ou da mediação do professor, dizerem que são 7 laranjas e uma metade.

Das metades, passar para metade de metade é natural. Vejam a ilustração:

Quanto de laranja temos?

Números naturais não são suficientes para identificar essa quantidade, formada por três laranjas, quatro metades de laranja e uma metade de metade de laranja. É um bom momento para informar que metade de metade também tem um nome: *quarto*. Ao todo, são cinco laranjas e um quarto. Para chegar a essa afirmação, usamos o conceito intuitivo de metade, juntamos duas metades e consideramos uma laranja, e atribuímos um nome a um novo número para designar uma parte especial da unidade – um quarto – que designa a metade da metade, o que corresponde a uma das partes resultantes da partição da laranja em quatro partes iguais. Fica evidente que a quantidade correspondente a c*inco laranjas e um quarto de laranja* é maior que a quantidade de *cinco laranjas* e menor que a quantidade de *seis laranjas;* assim, o número cinco e *um quarto* é maior que 5 e menor do que 6.



Veja: desse modo já evitamos formas de retângulos ou círculos caindo do céu e divididos em 2, 3, 4, 5, etc. partes – uma afronta aos conhecimentos prévios da criança.

Colocamos apenas dois tipos de frações - meios e quartos – e elas se acomodaram muito bem entre as unidades inteiras.

É importante que as frações-partes comecem a aparecer no meio de coleções que contenham também unidades inteiras, caracterizando uma ampliação da possibilidade de quantificação, que antes só contemplava coleções de coisas inteiras. Além disso, é importante que mantenham relações evidentes entre si. Nesse sentido, defendemos a introdução em sequência de: **meios e quartos, terços e sextos, quintos e décimos, podendo cada uma ser seguida, respectivamente, oitavos, doze avos e vinte avos.**

A abordagem feita não deixa dúvidas de que a questão é análoga à de contar, mas num contexto mais ampliado. Novas palavras são necessárias para descrever a quantidade total: metade e quarto, e elas aparecem junto aos nomes dos números naturais. Essas palavras, além de designar partes especiais, surgem impregnadas de um senso numérico. Há uma interrelação entre o universo das partes e o das unidades inteiras que se reflete também nos números correspondentes, sendo nítida a anexação de novos números aos números naturais já conhecidos. São dois fatores a serem observados nesse processo:

1. A demanda em uma situação da realidade - que foi a necessidade de informar a quantidade de laranja.

2. O sentido de número fracionário vinculado à quantificação.

Portanto, acordado com essa perspectiva, sugerimos na sequência didática abaixo, o jogo: *Quem forma dez primeiro – meios e quartos*.

Sequência Didática: Frações – meios e quartos

TEMA: Fração

Objetivos

- Reconhecer a fração (própria ou aparente) como uma ou mais partes do todo igualmente dividido, ou sua representação;
- Reconhecer o nome de frações próprias apresentadas: meios e quartos, estabelecendo relações entre elas;
- Ler e interpretar os números fracionários presentes em gêneros textuais diversos.

Material necessário

- Canudos;
- Lápis;
- Borracha;

- Papel;
- História em quadrinhos;
- Quadro branco.

Aprofundando o Tema

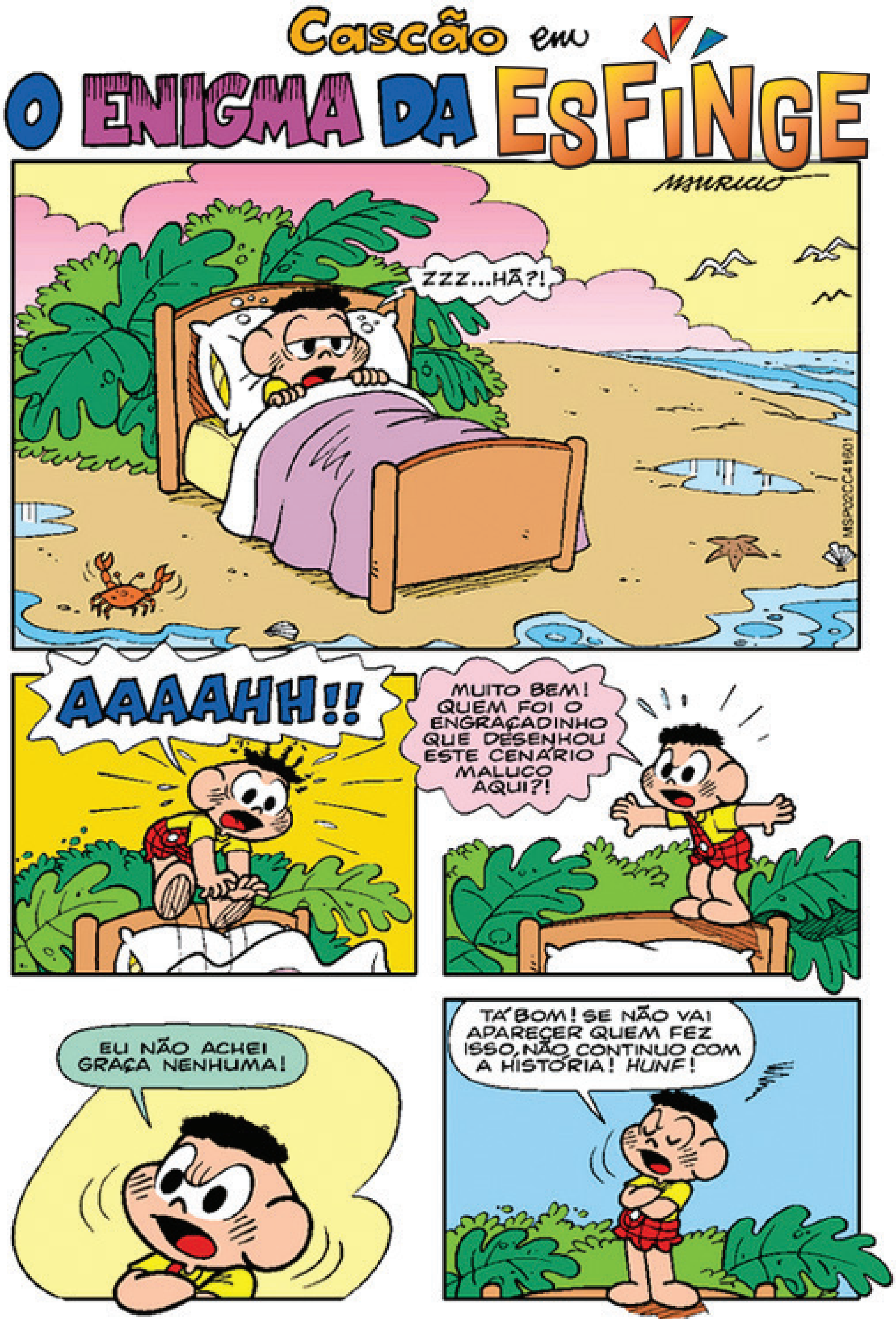
Nessa sequência didática sobre frações, propomos o estudo dos meios e quartos, em vários contextos: história em quadrinhos com desafios, situações cotidianas e jogo. É interessante que o aluno vivencie diferentes experiências para que perceba o aparecimento natural de meios e quartos, e assim dos números fracionários, ampliando suas possibilidades de contagem e sem a ruptura do que já conhecia sobre números naturais.

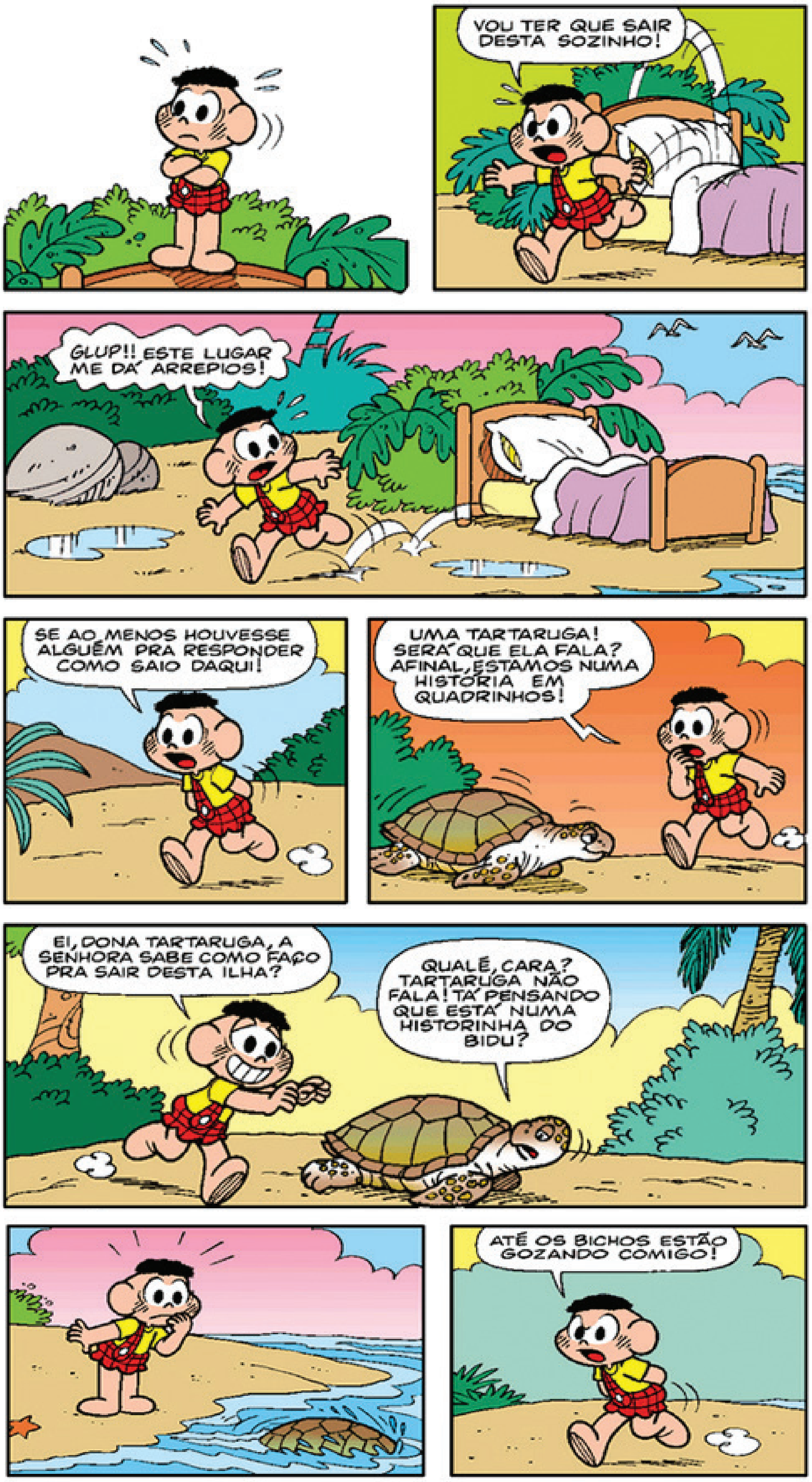
Atividade 1

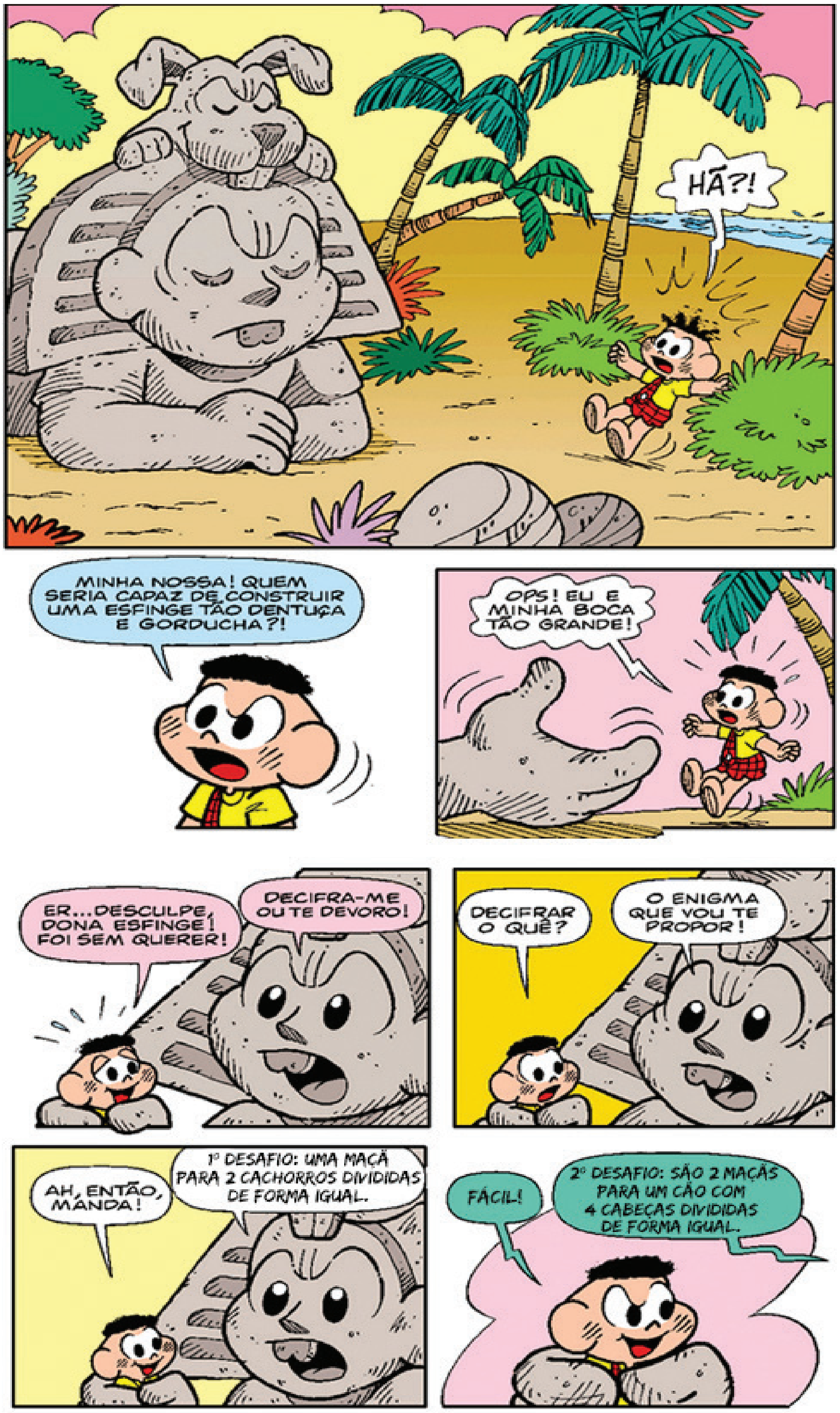
Realize a leitura da história em quadrinhos: "Cascão e o enigma da esfinge" com os alunos, levantando hipóteses para a solução dos enigmas. Distribua a turma em grupos (máximo 6 alunos por grupo), para que você tenha no máximo 5 hipóteses a ser coletadas. Estabeleça 10 a 15 minutos para a resolução dos problemas propostos. Deixe os estudantes livres para levantar as hipóteses, sejam elas: verbais, escritas ou gráficas. Uma vez definidas as hipóteses, colete-as expondo-as no quadro. Oriente a discussão das hipóteses canalizando-as para a solução dos enigmas. Nomeie e explique o significado de MEIOS e QUARTOS para os alunos, usando situações como abaixo.Mostre onde encontramos MEIOS E QUARTOS em situações cotidianas. Reforce a ideia de que MEIOS e QUARTOS representam uma ou mais partes do todo igualmente dividido.

Fonte: foto pública da internet

História em Quadrinhos:




VOU TER QUE SAIR DESTA SOZINHO!
GLUP!! ESTE LUGAR ME DÁ ARREPIOS!
SE AO MENOS HOUVESSE ALGUÉM PRA RESPONDER COMO SAIO DAQUI!
UMA TARTARUGA! SERÁ QUE ELA FALA? AFINAL, ESTAMOS NUMA HISTÓRIA EM QUADRINHOS!
EI, DONA TARTARUGA, A SENHORA SABE COMO FAÇO PRA SAIR DESTA ILHA?
QUALÉ, CARA? TARTARUGA NÃO FALA! TÁ PENSANDO QUE ESTÁ NUMA HISTORINHA DO BIDU?
ATÉ OS BICHOS ESTÃO GOZANDO COMIGO!


HÃ?!
MINHA NOSSA! QUEM SERIA CAPAZ DE CONSTRUIR UMA ESFINGE TÃO DENTUÇA E GORDUCHA?!
OPS! EU E MINHA BOCA TÃO GRANDE!
ER... DESCULPE, DONA ESFINGE! FOI SEM QUERER!
DECIFRA-ME OU TE DEVORO!
DECIFRAR O QUÊ?
O ENIGMA QUE VOU TE PROPOR!
AH, ENTÃO, MANDA!
1º DESAFIO: UMA MAÇÃ PARA 2 CACHORROS DIVIDIDAS DE FORMA IGUAL.
FÁCIL!
2º DESAFIO: SÃO 2 MAÇÃS PARA UM CÃO COM 4 CABEÇAS DIVIDIDAS DE FORMA IGUAL.

Fonte: http://turmadamonica.uol.com.br/historia/cascao-em-o-enigma-da-ilha/ (História em quadrinhos adaptada para fins pedagógicos em 03/04/2017)

Respostas dos desafios e análises com os alunos

No desafio 1: “1 maçã para 2 cachorros dividida igualmente”, a resposta é “meia maçã” ou “metade”.

No desafio 2: “2 maçãs para 1 cachorro com 4 cabeças, de forma igual”, o resultado é o mesmo que deu no primeiro: 1/2, mas o aluno passará a ter percepções importantes: que fração é o quociente de dois naturais; que dividir 1 por 2 dará o mesmo resultado de quando dividimos 2 por 4 etc. Saliente essa nova informação sobre fração: além de expressar a relação entre a parte e a unidade toda, ela também representa o quociente da divisão do numerador pelo denominador. Veja a divisão:

2 maçãs divididas igualmente para 4 “cabeças”: 2 |4

É uma divisão de naturais, parece que não existe relação com frações. Tem um divisor e um dividendo, mas o quociente não será um número natural.

Mas você pensa, imagina, desenha e consegue ver quanto será o resultado: 2/4. Desse jeito, você pode olhar qualquer fração e vê-la como o quociente do número que representa seu numerador pelo número que representa seu denominador.

No desafio 3 há uma fila de 20 camelos. Os ímpares (1º, 2º, 3º...) recebem 1 maçã, os pares recebem meia maçã. Há 10 ímpares, que recebem 10 maçãs; e 10 pares, que recebem 5 maçãs. No total são 15 maçãs. Mas se essa distribuição for feita só para os 9 primeiros da fila, então são 5 ímpares: 1 – 3 – 5 – 7 – 9, que recebem 5 maçãs; e 4 pares, que recebem 2 maçãs. No total os nove camelos recebem 7 maçãs.

Atividade 2

Distribua e apresente o jogo: Quem forma dez primeiro? Leia as regras com os estudantes. Explique as regras e esclareça as dúvidas existentes.

JOGO: Quem forma dez primeiro?

Objetivo

- Facilitar o entendimento dos números fracionários 1 meio e 1 quarto, compreendendo o segundo como metade do primeiro;
- Jogadores: 2 a 4 alunos.

Materiais necessários (colocado no centro da mesa):

- Canudos inteiros de uma única cor (pode ser branco);
- Canudos cortados ao meio, portanto representando metades ou meios (1/2), de uma única cor (pode ser vermelho);

- Canudos cortados no “meio do meio (1/4)”, de uma única cor. (Pode ser amarelo).

Dado com os seguintes escritos na face: 1 meio, 2 meios, 1 quarto, 3 quartos, 4 quartos, 2 (sem notação simbólica de número fracionário). Os alunos poderão ajudar em sua confecção.

Observação: cortar os canudos com capricho e precisão.

Regras

1. Decidam quem começa a jogar e qual a ordem dos jogadores.
2. Cada um, na sua vez, joga o dado e pega a quantidade de canudos de acordo com as partes ou os inteiros que saíram no dado.
3. Para as próximas jogadas, as partes ou canudos irão juntando-se ao que tinha antes.
4. Cada vez que um jogador conseguir partes que podem ser trocadas por meios ou inteiros, poderá fazê-lo. Também é permitido pegar mais do que saiu e “dar troco” – por exemplo, saiu 3 quartos no dado, então o aluno pode pegar um canudo inteiro e dá 1 quarto de troco (isso não é ensinado, deve partir do aluno).
5. Ganha o jogo quem primeiro conseguir formar 10 canudos inteiros.

Sugestões de perguntas reflexivas sobre o jogo:

- Como vocês realizaram as trocas?
- Quando conseguiram trocar por um canudo inteiro?
- Quando conseguiam trocar pela metade de um canudo (meio)?

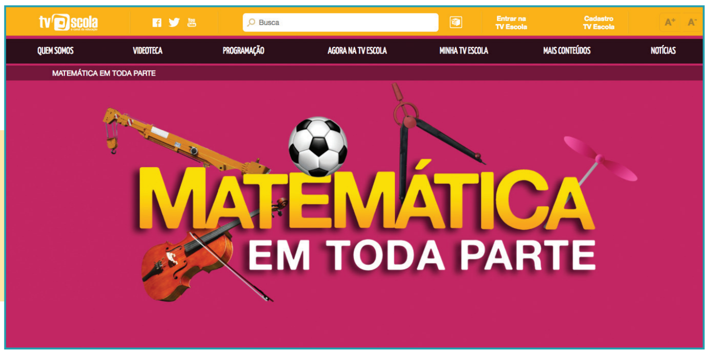
Ao final, peça que os alunos que alinhem o material que ganharam na partida, formando uma reta. Pode ser no chão, e a reta de um deve estar paralela à dos demais. Devem realizar a comparação e ver quem ganhou a partida. Essas retas servirão de base para a compreensão da inserção de frações na reta numérica.

Outras sugestões: desafios

Uma senhora levava uma cesta de cocadas para dar de presente aos seus netos.Ao primeiro ela deu a metade das cocadas que levava mais meia cocada; ao segundo, deu a metade do que restou e mais meia cocada; finalmente, ao terceiro neto ela deu a metade do que ainda sobrou e mais meia cocada. Desta feita, não sobrou nenhuma cocada. Quantas cocadas a senhora tinha na cesta?

Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/7963724

VÍDEOS: http://tvescola.mec.gov.br/tve/videoteca/serie/matematica-em-toda-parte (MATEMÁTICA EM TODA PARTE – ver Matemática na Música)



A iniciação às frações por meio da sequência didática apresentada permite aos alunos, só pensando, dar respostas a duas das questões que formulamos:

- Um meio dividido por 2, quanto dá?
- Bebi metade do litro de leite e minha irmã bebeu metade do que sobrou, quanto ficou do litro?

Pense como poderiam ser essas respostas.

As relações entre o inteiro, as metades e os quartos são claras. E podemos explorar inúmeras atividades. Você imagina algumas?

Indo além: trabalho multidisciplinar com frações

- Linguagem (História em Quadrinhos, Leitura e Produção de texto);
- Geografia e História (Egito – surgimento dos números fracionários);
- Ciências – Água (Importância da água no Egito e no Brasil).

Outras frações com relações fáceis de perceber: o móvel foi dividido em 3 partes verticais. Cada professor ocupa uma dessas partes, que se chama 1 terço do móvel. Cada terço tem duas partes iguais, com duas portinhas, uma em cima da outra. São metades do terço e chamam-se sextos.

Podemos dizer que cada professor ocupa 1 terço ou 2 sextos do móvel. O móvel todo tem quantos sextos? Metade do móvel tem quantos sextos?

Agora pense na terceira pergunta que fizemos. Pode fazer desenhos, mas não use regras:

Dividindo-se 10 cocadas para 6 crianças, quanto cada uma recebe, se não deixarmos sobrar nada? Pense e faça, antes de prosseguir na leitura.

Professor: Você pode começar de vários modos. Pode ter procurado achar logo a resposta certa e final. Em geral, crianças começam pensando em dar uma cocada a cada um dos seis, sobrando 4. Continue imaginando modos possíveis de distribuir essas 4. Talvez sua tendência seja pensar que 4 dividido por 6 dá 4/6, mas sugerimos que, para melhor entender e dar significado, você não use regras. O que acha de dividir em metades? Veja quanto pode dar a cada um nessa etapa e prossiga até o fim. A resposta não precisa estar na forma de uma única fração. A questão pode ser apresentada aos alunos, mesmo quando sabem apenas os conhecimentos sobre frações expostos até aqui.

Atividades importantes a serem trabalhadas com terços e sextos

Jogo: Quem forma dez primeiro – terços e sextos

Nesta versão do jogo já desenvolvido na *Sequencia didática: Frações: meios e quartos*, os dados devem ser substituídos com os seguintes dizeres nas faces: 1 sexto – 2 sextos – 3 sextos – 1 terço – 2 terços – 1, bem como as partes de canudos que devem corresponder a terços e sextos de um canudo inteiro. Mas, atenção as regras continuam as mesmas.

- Utilizar gêneros textuais que explorem estes números fracionários

Indicamos ainda o vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=Q9uPKTPWRmo>.

Atividades importantes para serem trabalhadas com quintos e décimos

Jogo: Quem forma dez primeiro – quintos e décimos

Nesta versão do jogo já desenvolvido na *Sequência didática: Frações: meios e quartos*, os dados devem ser substituídos com os seguintes dizeres nas faces: 1 décimo, 2 décimos, 5 décimos, 1 quinto, 4 quintos, 5 quintos, bem como as partes de canudos que devem corresponder a quintos e décimos de um canudo inteiro. Mas, atenção as regras continuam as mesmas.

Situações-problema:

- O bolo está dividido em 2 metades. Uma metade está dividida em 5 fatias iguais. Cada fatia vale 1 décimo do bolo. *Você consegue imaginar a razão desse nome?*
- A mãe dividiu o bolo inteiro em 10 fatias iguais. Depois do lanche sobrou meio bolo. Quantos décimos do bolo sobraram?

!

Após tudo o que foi visto, tenha em mente a importância de:

- Recuperar experiências prévias
- Articular frações à contagem com números naturais

Nomes, ordem de introdução e início dos símbolos com frações unitárias

Nos números naturais, a criança trabalha um bom tempo com os nomes dos números, antes de conhecer os símbolos para eles. Acreditamos que, do mesmo modo, nas frações, as crianças devam trabalhar um tempo só com os nomes. A sequências didática acima, por exemplo, aconselhamos usar apenas os nomes dos números fracionários.

Também escolhemos uma ordem de apresentação que permita o estabelecimento de relações entre as frações e, com isso, maior atribuição de significado a elas.

Ao introduzirmos meios e depois quartos, as crianças percebem logo que 1 inteiro menos a metade dá outra metade, que um meio dividido por 2 dá um quarto; que 4 quartos formam 1 inteiro, que 1 meio mais 1 quarto são 3 quartos. Do mesmo modo estabelecem relações entre inteiros, terços e sextos e poderão estabelecer entre inteiros, quintos e décimos. No último problema, das cocadas, podem ter estabelecido relações entre inteiros, metades e sextos. De fato, se dividiram as 4 cocadas restantes ao meio, deram metade a cada um. Gastaram 6 metades e ainda sobraram duas. Dividiram cada metade em 3 pedaços. É possível que ainda não identifiquem essa parte, mas o professor pode perguntar quantas dessas formam o inteiro.

Após essa etapa com os nomes das frações, vem a introdução dos símbolos. Optamos em fazer inicialmente apenas para as frações unitárias:

1 meio = $\frac{1}{2}$ → obtido quando dividimos 1 em duas partes iguais.

1 quarto = $\frac{1}{4}$ → obtido quando dividimos $\frac{1}{2}$ em duas partes iguais. Ou se dividirmos 1 inteiro em 4 partes iguais.

1 terço = $\frac{1}{3}$ → obtido quando dividimos 1 em três partes iguais.

1 sexto = $\frac{1}{6}$ → obtido quando dividimos $\frac{1}{3}$ em duas partes iguais. Ou se dividirmos 1 inteiro em 6 partes iguais.

1 quinto = $\frac{1}{5}$ → obtido quando dividimos 1 inteiro em 5 partes iguais.

1 décimo = $\frac{1}{10}$ → obtido quando dividimos $\frac{1}{5}$ em duas partes iguais. Ou quando dividimos um inteiro em dez partes iguais.

Esse cuidado tem respaldo histórico, pois os egípcios trabalhavam quase somente com frações unitárias e encontravam maneiras de escrever uma fração como soma de duas frações unitárias. Behr e Post (1992) estudaram bastante a aprendizagem das frações, mostram a dificuldade que as crianças têm em coordenar dois símbolos numéricos quaisquer para dar sentido ao número fracionário: "Vamos pensar cuidadosamente sobre o que pode estar envolvido para que uma criança compreenda que 3/5 representa uma só entidade, compreender o que é essa entidade, que ela tem um tamanho e que tamanho é esse".

Apesar da nossa opção por introduzirmos as frações com numerador 1, as situações e os jogos propostos levam sem demora a expressões como 3 quartos, 2 terços, 4 décimos, isto é, a numeradores diferentes de 1. Como introduzir a notação para essas frações gerais? Uma vez familiarizados com o entendimento da notação para as frações unitárias, podemos designar as demais usando inicialmente uma forma que mistura língua materna e frações unitárias, escrevendo: 3 de ¼, 2 de 1 terço, 4 de 1 décimo. Após assimilados, informamos novos modos possíveis de escrever:

3 de 1/4 = 3/4 (3 quartos)

2 de 1/3 = 2/3 (2 terços)

4 de 1 décimo = 4/10 (4 décimos)

Mas o professor deve lembrar-se também de fazer o caminho inverso, quando encontrar uma fração na escrita usual, como no livro didático. Sugerimos:

3/4 → lê 3 quartos e lembra os alunos: são *3 de 1 quarto*.

Após isso, podemos introduzir as frações unitárias em que a unidade foi dividida em um número qualquer de partes iguais, e seus nomes, estimulando os alunos a fazerem relações:

1/8 → 1 oitavo. Em quantas partes o inteiro foi dividido? Quantas são necessárias para formar metade do inteiro? Ela vale metade de alguma fração conhecida?

1/9 → 1 nono. Em quantas partes o inteiro foi dividido? Quantas são necessárias para formar metade do inteiro? Ela vale metade de alguma fração conhecida? Vale um terço de alguma fração conhecida?

Também deve ser dada atenção às frações unitárias com denominadores primos: 1/7, 1/ 11, 1/13.

Não conseguimos estabelecer relações entre elas e as frações que já conhecemos. Mas podemos dividir cada sétimo em duas partes iguais. A unidade ficará dividida em 14 partes iguais, cada uma chama-se 1 quatorze-avo. E cada sétimo vale dois quatorze avos: 1/7 = 2 de 1/14 = 2/14.

Esse procedimento de dividir uma fração em 2 partes iguais, e pegar as duas para *ficar com o mesmo tanto*, será fundamental para estabelecer a equivalência de frações.

Aproveitar para discutir o significado da palavra avo, que também aparece em oitavo, centavo.

Finalmente, as frações gerais:

7/16 → 7 de 1 dezesseis avos, ou 7 dezesseis avos. A unidade foi dividida em 16 partes iguais e pegou-se 7.

!

Trabalhar inicialmente:

- Só com nomes nas frações.
- Com frações unitárias.
- Introduzir as frações numa ordem que favoreça relações.
- Introduzir símbolos numéricos para as unitárias, depois para as demais, de acordo com procedimento descrito (3 de ¼).
- Introduzir a terminação avo ou avos.

Formação do conceito, esquemas, invariantes: equivalências e comparações

Em propostas que estimulam a percepção e o raciocínio das crianças, elas são capazes de inferir regularidades, padrões de invariância, que estão incluídos nos esquemas.

Equivalência

Em frações unitárias, as crianças percebem logo que funciona o esquema *quanto mais divide, menor fica*: 1/12 é menor do que 1/8, porque para se obter 1/12 tem-se que dividir a unidade em 12 pedaços iguais, e para obter 1/8 só se divide em 8. Quando divide em 12 o pedaço fica menor.

Mudando para pedaços do mesmo tipo, referentes à uma mesma unidade, também sabem que 5/8 é maior do que 3/8, porque *5 de 1 oitavo é mais do que 3 de 1 oitavo*.

A coordenação desses dois esquemas permite que percebam casos gerais em que as frações são iguais, ou valem o mesmo tanto (são equivalentes). Vejam a lógica:

Quero comer uma metade do bolo. Se dividirem esse pedaço em 2, teremos quartos. Mas aí, para não sair perdendo, vou comer 2 quartos. Ou seja:

Quero ½ → Se partirem a metade ao meio terei quartos → Mas então quero 2 quartos

Quero ½ → Se partirem a metade em 3 pedaços iguais, terei sextos → Vou querer 3 sextos.

Professor: Será que você percebeu uma sutileza?

Da metade (denominador 2) para passar a quartos, MULTIPLIQUEI o denominador por 2.

Para ficar com o mesmo que tinha, MULTIPLICO também o numerador por 2:

1/2 = 2/4

Ou seja:

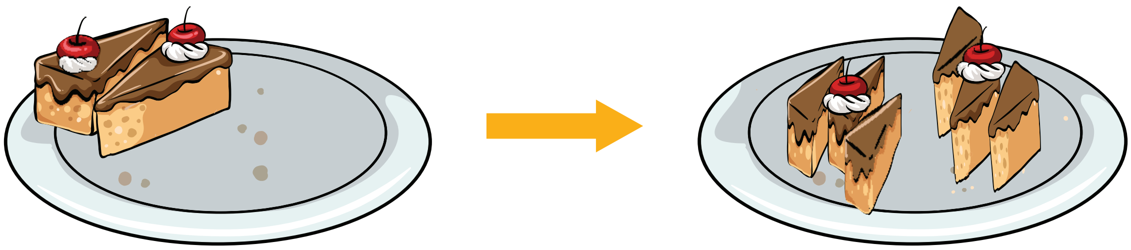
- Multiplicar o denominador significa que vamos **aumentar** o número de partes em que dividimos o inteiro. Elas vão ficar menores!
- Multiplicar o numerador significa que vamos pegar mais partes. Aí compensamos a perda.

(Para efeito de melhor comunicação entre nós, usamos esses dois termos referentes a frações: numerador e denominador. Cuidado ao introduzi-los em sala. Ou use repetindo o que quer dizer: o *denominador, aquele que fica embaixo*...). Veja:

$$\frac{2}{5}\ \overset{x3}{\underset{x3}{\longrightarrow}}\ \frac{6}{15} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

Imagine que tínhamos 2/5 da torta.

E dividimos cada pedaço em 3. Temos 6 pedaços menores.



Cada pedaço que eu tinha ficou dividido em 3 menores. Se quero ter o mesmo, agora pego os três para cada um que eu tinha.

Apareceram 15 avos! Esquisito. De onde veio isso? Para saber quanto cada fatiazinha representa da torta, imaginamos que cada um dos outros 3 quintos também fosse dividido em 3. A torta ficaria dividida em 15 pedaços, não é? Portanto, temos quinze avos da torta. Na verdade, agora pegamos 6 fatias de 1 quinze avos. É o mesmo que 2 fatias de 1 quinto. Não perdemos nada.

Dá para fazer a volta?

Vimos que, multiplicando o numerador e o denominador de um número fracionário por um mesmo número, a fração indicada vale o mesmo que a anterior.

E se dividirmos o numerador e o denominador de um número fracionário por um mesmo número, a fração indicada vale o mesmo que a anterior?

Sim. Porque então acontece o contrário:

- *Dividimos o denominador e ele passa a indicar pedaços maiores*
- *Dividimos o numerador e significa que vamos pegar menos pedaços.*

Antes de ler o próximo item vamos refletir sobre a situação abaixo:

Três meninos dividiram e comeram igualmente uma pizza[3]. Duas meninas dividiram e comeram igualmente uma segunda pizza do mesmo tamanho da dos meninos. Todas as crianças comeram a mesma quantidade de pizza? Quem comeu mais – um menino ou uma menina?

Depois vieram 4 adultos, que pediram e comeram igualmente uma pizza igual a das crianças. Comeram mais ou menos do que comeu um menino e do que uma menina?

3 Situação-problema retirada do livro: Bryant e Nunes.

Comparação de frações e números fracionários: esquemas alternativos para comparação de frações

Nesse item, focaremos a atenção nos esquemas que a criança começa a constatar serem válidos na comparação de frações.Ou ainda naqueles que ela beira a compreensão, e que poderá explicitar mediada pelo professor. Para efeito didático, e alertando para o fato de que outros poderão surgir, apresentaremos o que optamos por chamar de tipos de esquema que surgem na comparação.

Tipos de esquemas comparativos:

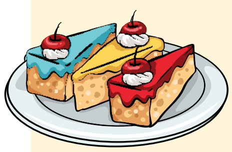
1 . Qual é a maior: 1/12 ou 1/8?

Se viveu oportunidades de produzir gradativamente partes da unidade, a criança percebe que se dividiu mais, o pedaço ficou menor.

1/8 é o maior porque dividiu menos.

Tipo 1.

Esse esquema em frações unitárias indica que quanto mais divide, menor fica, conforme já mencionado.



2. Qual é a maior: 6/12 ou 6/8?

Prosseguindo no raciocínio da situação anterior, a criança percebe que se tiver o mesmo número de pedaços, porém de naturezas diferentes, terá mais no caso dos pedaços serem maiores.

Tipo 2.

Esse esquema segue o mesmo raciocínio das frações unitárias, estendendo para o caso de frações de mesmo numerador (mesma quantidade de pedaços). O esquema básico é: Se *1/8 é maior do que 1/12, então 6/8 também é maior do que 6/12*.

3. Qual é a maior: 11/4 ou 23/4?

Moleza, não é? Quem tem 23 pedaços de um quarto ganha de quem tem 11 pedaços de um quarto.

Tipo 3.

Veja que essas frações se referem a vários pedaços de mesmo tamanho (têm mesmo denominador). Todos pedaços são quartos. Por exemplo: Você pode pensar em muitas laranjas divididas em quartos. Quem tem 23 pedaços de ¼ ganha de quem tem 11 pedaços de 1/4.

4. Qual é a maior: 5/6 ou 9/12?

Tipo 4.

Tenho sextos porque a unidade foi dividida em 6 partes iguais.

Para que fique dividida em 12 partes iguais, é só dividir cada sexto ao meio.

Cada sexto que eu tinha será transformado em 2 doze avos. Ficarei com 10 doze avos. Oba! É mais do que 9 doze avos. 5/6 é a maior.

5. Qual é a maior: 7/8 ou 11/10?

Será que uma é menor do que a unidade e a outra é maior?
Se eu souber isso, saberei qual é a maior.

Tipo 5.

Comparando ambas com a unidade:

7/8 → menor do que a unidade, porque a unidade seria 8/8.

11/10 → maior do que a unidade, porque a unidade é 10/10.

Então 7/8 é menor do que 11/10.

6. Será que uma é menor do que a metade e a outra é maior?
Se eu souber isso, saberei qual é a maior.

Tipo 6.

Pensando em metades:

3/8 → menor do que a metade, porque a metade seria 4/8.

6/10 → maior do que a metade, porque a metade é 5/10.

Então 3/8 é menor do que 6/10.

Mas se ambas forem maiores ou menores do que a metade, esse esquema não funciona.

7. Qual é a maior: 13/4 ou 15/6?

Ambas são maiores do que uma unidade. Será que uma delas tem mais unidades do que outra?

Tipo 7.

Pensando em qual tem mais unidades: 13/4 e 15/6.

Temos 13 de ¼. Podemos separar de 4 em 4 para ir formando inteiros:

13/4 = 4/4 + 4/4 + 4/4 + ¼ = 1 + 1 + 1 + ¼ = 3 e ¼ (que pode ser escrito $3\frac{1}{4}$)

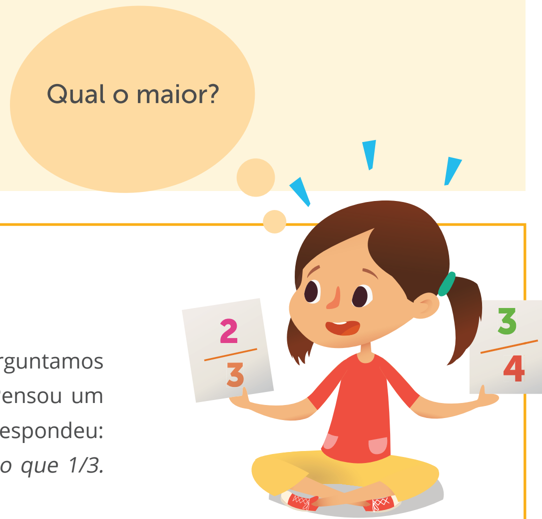
15/6 = 6/6 + 6/6 + 3/6 = 1 + 1 + 3/6 = 2e 3/6 (que pode ser escrito $2\frac{3}{6}$)

Veja que bom processo para separar as unidades!

A fração 13/4 é maior porque tem 3 unidades e mais uma parte, enquanto 15/6 tem 2 unidades mais uma parte, não chega a 3.

8. Qual é a maior: 2/3 ou 3/4?

Ambas são maiores do que a metade...
Mas não chegam a formar uma unidade.



Tipo 8.

Pensando em quanto falta para completar uma unidade.

Em um jogo, Anete tinha que decidir o que era maior: 2/3 ou ¾. Perguntamos se ela queria pegar material, mas ela disse que não precisava. Pensou um pouco e disse ¾. Perguntamos a ela como havia pensado, ao que respondeu: *se eu como 2/3, sobra 1/3. Se como ¾, sobra ¼, que é menor do que 1/3. Quando sobra menos é porque comi mais.*

9. Qual é a maior: 7/9 ou 11/13?

Essa está mais difícil de decidir...

Tipo 9.

O procedimento de Anete funciona quando, em ambas as frações, a diferença entre o denominador e o numerador é expressa pelo mesmo número natural.

Ou seja, falta o mesmo número de pedaços para que cada uma atinja a unidade. Por exemplo: 7/9 e 11/13 – ambas as diferenças são iguais a 2 - na primeira faltam 2 nonos para formar uma unidade, na segunda faltam 2 treze avos. Como 2 treze avos é menor do que 2 nonos (dividiu em mais partes), a fração 11/13 será a maior. Veja novamente:

1/13 é menor do que 1/9.

2/13 são menores do que 2/9 → 11/13 é a maior ("*se sobrar menos é porque eu comi mais*").

São ambas maiores que a metade, menores do que a unidade, as diferenças entre o numerador e o denominador, em cada uma são diferentes. Será que não saberemos responder? Calma. Ainda temos recursos.

Lembra-se da história de multiplicarmos o denominador e o numerador por um mesmo número? Obtemos uma fração que vale o mesmo tanto da primeira, ou seja, é uma fração equivalente a ela. Agora temos duas frações: 5/6 e 7/9. Podemos fazer isso com cada uma delas, obtendo frações equivalentes a cada uma.

Veja como conseguimos duas frações equivalentes a 5/6.	Aqui conseguimos uma fração equivalente a 7/9. Paramos porque conseguimos um denominador igual para as duas: 18.

$$\frac{5}{6} \xrightarrow{\text{x2}} \frac{10}{12} \qquad \frac{7}{9} \xrightarrow{\text{x2}} \frac{14}{18}$$

$$\frac{5}{6} \xrightarrow{\text{x3}} \frac{15}{18}$$

Ou seja, conseguimos escrever 5/6 e 7/9 de outros modos equivalentes. O importante foi que para ambas conseguimos uma fração equivalente com o mesmo denominador, 18. 5/6 foi escrita de modo equivalente como 15/18 e 7/9 foi escrita como 14/18. Ficou fácil ver que 5/6 é a maior.

Você pode pensar que, nesse caso, tivemos sorte. Com poucas tentativas conseguimos transformar as duas frações (5/6 e 7/9) em frações equivalentes a cada uma (15/18 e 14/18), sendo as novas frações ambas do mesmo tipo, isto é, referem-se ao mesmo tipo de pedaços - dezoito avos da unidade.

Observe que foi muito importante chegar em um múltiplo dos dois denominadores iniciais: 18, que é múltiplo de 6 e de 9. Pelo fato de ser múltiplo, 18 pode ser obtido multiplicando cada denominador inicial por certo número: multiplicando 6 por 3 chegamos no 18, e multiplicando 9 por 2 chegamos em 18. Em seguida, multiplicamos os numeradores de cada uma respectivamente pelos mesmos números, para que as frações continuem indicando as mesmas quantidades.

Qualquer outro múltiplo de 6 e 9 também serviria – por exemplo, 36.

$$\frac{5}{6} \overset{x?}{\underset{x?}{\longrightarrow}} \frac{}{36} \qquad \frac{7}{9} \overset{x?}{\underset{x?}{\longrightarrow}} \frac{}{36}$$

Descubra por quanto você multiplicou 6 para obter 36. Foi por 6. Então multiplique o numerador 5 também por 6.

Depois descubra por quanto você multiplicou o denominador 9 para obter 36. Foi por 4. Então multiplique o numerador 7 também por 4. Veja como foi o procedimento:

$$\frac{5}{6} \overset{x6}{\underset{x6}{\longrightarrow}} \frac{30}{36} \qquad \frac{7}{9} \overset{x4}{\underset{x4}{\longrightarrow}} \frac{30}{36}$$

Mesmo na forma de alguns 36 avos, 5/6 ainda é a maior.

Mas digamos que você se atrapalha na hora de achar um número que seja múltiplo de 6 e de 9. Não conseguiu achar o 18 nem o 36. Então aqui vai um Lembrete:

O produto (resultado da multiplicação) de dois números é sempre um múltiplo de ambos.

Então 54 = 6x9 é um múltiplo de 6 e de 9 e pode ser usado para comparar as frações.

!

Atenção aos esquemas das crianças:

- Quanto mais divide, menor fica (denominadores maiores implicam em pedaços menores);
- Quanto mais pega (do mesmo tipo), mais se tem;
- Coordenação dos dois processos (dividir mais e pegar mais) para obter frações equivalentes.

Comparações por processos alternativos:

- Frações unitárias;
- Mesmo número de pedaços, porém com tipos diferentes (mesmo numerador);
- Frações do mesmo tipo (mesmo denominador);
- Frações com relações evidentes entre si;
- Menor que um inteiro, maior que a unidade;

- Menor que a metade, maior que a metade;
- Qual tem mais unidades;
- Faltando apenas um pedaço para completar um inteiro;
- Faltando a mesma quantidade para completar um inteiro;
- Comparação por transformação em frações equivalentes e de mesmo tipo (mesmo denominador);
- Uso do produto dos denominadores.

Operações entre números fracionários

Para que serve falar em operações entre frações, se não apresentarmos situações-problema significativas que requeiram essas operações?

Estimulando estratégias espontâneas

As operações entre frações terão mais significado se forem introduzidas por meio de situações-problema que possam, ao início, ser resolvidas por estratégias próprias dos alunos, usando a compreensão que adquiriram sobre frações.

Situações-problema envolvendo frações e números fracionários

1. Para fazer um leite batido, foram misturados:

- meio litro de leite;
- 1 quarto de litro de suco de laranja;
- 1 quarto de litro de suco de acerola.

Quantos litros formou no total?

Você saberia a resposta apenas pensando?

Que operação você fez mentalmente?

(Se propuser aos alunos, dê tempo para que pensem).

Observação: Alguns alunos podem falar que *dividiram*: dividiram o litro de leite para ter metade, dividiram o litro de suco de laranja e o de acerola em 4 para obter quartos. Você deve dizer que está certo, que é necessário fazer tudo isso antes de bater no liquidificador. Mas depois que tudo já está medido - o meio litro de leite, e os quartos de suco - que operação podemos fazer para obter o total?

Registre a operação feita no seu caderno, do modo que quiser. Modos possíveis:

Meio litro 1/2

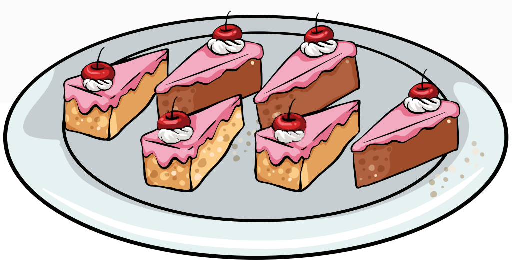
+ 1 quarto de litro + 1/4

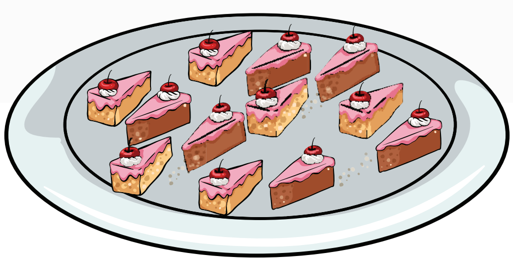
+ 1 quarto de litro 1/4

Problema

2. O bolo foi dividido em 6 partes iguais, chamadas sextos.

Cada sexto foi dividido em duas partes iguais. O bolo ficou dividido em 12 partes iguais. Cada parte chama-se 1 doze avo ou 1/12 do bolo.





Veja o que aconteceu:

a) Joelmir comeu 1 quarto do bolo.

Você sabe quantos doze avos do bolo Joelmir comeu? ________________________

b) Edileila e Gláucia comeram 2/12 do bolo, cada uma.

Pense e responda: Joelmir, Edileila e Gláucia comeram juntos ____ /12 do bolo.

c) David veio e comeu o resto do bolo.

Complete: David comeu ____ /12 do bolo.

3. Pense e coloque os resultados:

a)	b)	c)	d)	e)	f)
$\begin{array}{r} 1 \text{ e } \frac{2}{12} \\ +2 \text{ e } \frac{4}{12} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \text{ e } \frac{4}{10} \\ +2 \text{ e } \frac{8}{10} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \frac{8}{9} \\ -\frac{3}{9} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \text{ e } \frac{7}{8} \\ -3 \text{ e } \frac{4}{8} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \text{ e } \frac{1}{2} \\ 3 \times \\ \hline \end{array}$	$3 \,\lfloor\, \underline{2 \quad}$

Ações pedagógicas: Não é aconselhável que o professor dê instruções ou explicações.

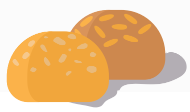
Sabemos que descobrir analogias ou padrões em matemática é muito importante. Para que interpretem e façam, é importante que tenham passado pela experiência prévia de registrar o problema do leite e dos sucos. As operações são propositadamente apresentadas na forma vertical[4], para estabelecer analogia com as operações entre números naturais. A parte fracionária, menor que a unidade, não vem justaposta às unidades. São separadas delas pela palavra "e", para sugerir que a soma de unidades e partes fracionárias possa ser feita separadamente. O professor percorre a sala para ver como estão fazendo. É aconselhável que os alunos façam sozinhos ou em grupos. Depois, podem apresentar e explicar como fizeram (esteja certo ou errado). O professor deve estimular as opiniões dos colegas e outros raciocínios. Se alguém quiser resolver com um desenho no quadro (branco ou de giz), poderá fazê-lo. O professor deve evitar que a solução tenha que ser dada por ele. Se os alunos não chegarem a um resultado correto, aceito pela maioria, ele pode propor que deixem para pensar melhor e voltem outro dia ao problema.

Especial mediação deve ser feita no caso do exercício b, no qual a soma, na coluna das frações, dá um número maior que a unidade. Também pode informar que é bom ler a operação de multiplicação do fator inferior para o superior. Assim, em e), lê *3 vezes 1 e meio*.

Sugerimos mediação discreta – principalmente estímulo a manifestações - e não informação de como fazer.

4. A merendeira fez 45 bolinhos para 30 alunos.

Dividindo igualmente para todos, quanto cada um recebe?



5. Na casa de Luís, eles cozinham 1 ½ xícara de arroz por dia.

Quanto de arroz gastarão, nos sete dias de uma semana?

4 Somas e subtrações verticais estão bastante presentes na apostila ... Apesar de divulgadas durante e após o projeto, não constatamos sua presença em livros didáticos. Muitos anos depois tivemos a oportunidade de constatá-las em uma obra bem anterior ao projeto: (PABAEE).

6. 3 chocolates para 4 crianças.

Se todos comerem igual, quanto cada um come?

7. Ivo mediu sua altura no fim do primeiro semestre e viu que tinha crescido 2 ½ centímetros.

Durante o segundo semestre ele cresceu mais 1 1/2 centímetros.

O que aconteceu com a altura de Ivo nesse ano?

Reflexão: Nessa fase, a mediação do professor deve ser mínima. Os alunos podem usar símbolos de frações ou palavras. Podem registrar do modo que quiserem, desde que possam explicar como pensaram. Quanto ao professor, ele pode, se necessário, explicar detalhes como o símbolo matemático (números naturais seguidos de frações próprias) com ou sem uso do “e”; pode explicar o que é o centímetro e mostrá-lo na régua ou na fita métrica etc.

Reflexão

Nessa parte que vimos das Orientações Pedagógicas, focamos diversos esquemas envolvendo equivalências e comparações entre frações, construindo, gradativamente dois pontos importantes:

- dada uma fração, como obter outra equivalente a ela
- dadas duas frações, como transformar cada uma em outra equivalente a ela, de modo que as duas frações obtidas sejam do mesmo tipo (tenham denominadores iguais).

O segundo ponto será básico para uma primeira formalização da soma e da subtração de frações. Achando as frações equivalentes com um mesmo denominador, tornaremos mais natural e entendido o processo de *reduzir ao mesmo denominador.* Usaremos um múltiplo comum, que pode ser o produto dos denominadores. Com isso, dispensamos o processo de encontrar o mínimo múltiplo comum (M.M.C.) entre os denominadores. Não precisa ser o menor múltiplo comum dos dois, basta que seja um múltiplo comum. Achar o M.M.C. é um procedimento demorado, que interrompe todo o raciocínio sobre frações que vinha sendo feito. Além disso, depois de achado, para somar frações ainda vem aquela coisa de *divide o M.M.C. pelo de baixo e multiplica pelo de cima*, totalmente sem compreensão para as crianças (e adultos).

Então, fique atento: “gastamos” tempo nisso que fizemos, umas economizaremos na soma e subtração entre frações. Que ficarão mais leves e compreensíveis.

Neste nível de ensino, não consideramos necessário atingir formalizações usuais, como as regras para obter os resultados das operações com números fracionários, pois o aluno já dispõe de ferramentas suficientes para resolver situações-problema não triviais. Além disso, várias das formalizações requerem um nível de maturidade cognitiva a ser atingido, por grande parte dos alunos, nos anos subsequentes.

Ampliando as possibilidades de interagir no mundo

> "Quando falamos sobre aritmética e geometria, não pensamos apenas em conceitos ou teoremas, mas nos referimos também a diferentes códigos, significados e sistema simbólicos, que expressam diferentes modos de nosso existir no mundo.".
>
> (Michel Otte, 1990, tradução nossa)

Reflexões iniciais sobre o ensino de geometria

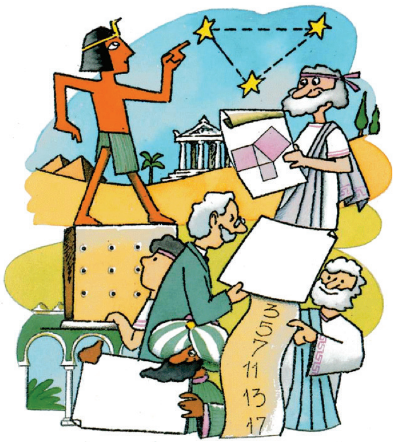
Este material de *Espaço e Forma* busca um diálogo com o professor, no intuito de ajudá-lo a compreender e refletir sobre o despertar do pensamento geométrico nos alunos e trazer contribuições para seu desenvolvimento escolar. Ao iniciar este tópico, propomos as seguintes questões para reflexão:

A escola tem propiciado uma visão de geometria que desenvolva a leitura, decodificação e entendimento do espaço que vivenciamos? Onde a geometria está presente? Que interações nos levam a perceber aspectos geométricos do espaço físico? Existem lacunas a serem preenchidas em relação ao ensino de geometria? Por que as crianças ao final dos anos iniciais não conseguem compreender claramente a noção de espaço e, principalmente, o espaço tridimensional?

É comum ouvirmos alguém dizer que não gosta de geometria, nem de estudá-la, e muito menos de ensiná-la. Podemos pensar quais são os motivos que levam a essa rejeição da geometria. Será que tivemos uma formação que permitisse nos apropriarmos adequadamente dos conhecimentos da geometria?

Estamos conscientes de que vivemos em um mundo rodeado por objetos de formas tridimensionais, de trajetórias que frequentemente fazemos de um lugar para outro e que ocorrem durante nossa vida. Nosso foco será compreender as diferentes ideias de cultura presentes na geometria e também suas manifestações artísticas, explorando situações que apresentem formas geométricas na natureza, suas representações no espaço ou no plano, localização com diferentes pontos de referência, bem como a distância espacial entre objetos. Em seguida, propõe-se um pequeno resgate histórico em relação ao conhecimento geométrico e sobre o ensino de geometria no Brasil.

Fazendo um passeio pela história da geometria e seu ensino no Brasil



Os homens das antigas civilizações tinham saberes de natureza geométrica, não sistematizados, mas que os ajudavam a compreender os fenômenos naturais. A civilização egípcia é um exemplo de utilização da geometria para medição de terras em volta do rio Nilo e a construção de monumentos de grande porte há mais de 4000 anos atrás.

Alguns povos antigos, como os gregos, assimilaram o que os egípcios faziam e avançaram, passando a usar o termo geometria de uma forma teórica, com demonstrações dedutivas e rigorosas das leis acerca do espaço. No século VI a.C., o matemático grego Tales iniciou esse processo, com a geometria dedutiva empírica que prosseguiu depois com o conhecido Pitágoras. A partir desses dois grandes matemáticos, ampliou-se o entendimento sobre o pensamento lógico-matemático, que resultou em uma intensa transformação e obtenção de um espírito crítico e com características, como é hoje, de amplas possibilidades investigativas. Um pouco mais tarde, por volta de 300 anos a.C., outro matemático grego, Euclides, escreveu "*Os elementos*", uma grande obra incluindo geometria e como devia ser o pensamento científico. Foi o primeiro a sistematizar a geometria como ciência dedutiva, introduzindo postulados e teoremas. Surgiu o que chamamos hoje de "matemática pura.". (GREEMBERG,1980).

A geometria Euclidiana integrou os currículos escolares oficiais brasileiros no período 1931 a 1961. Com a lei n. 5692 de 1961, a geometria passou a ser optativa e muitas escolas acabaram com as construções do desenho geométrico, surgindo o descrédito da geometria nesse período.

Na década de 1970, o ensino da geometria teve a influência do Movimento da Matemática Moderna (MMM), cuja ênfase na linguagem simbólico-matemática constituiu um obstáculo para o entendimento de conceitos. Nos livros didáticos, os conteúdos de geometria eram então apresentados no final do livro, e, além disso, eram complexos e difíceis de serem ensinados e considerados por alguns educadores matemáticos não relevantes para a formação do aluno (Fiorentini, 1995). Diante disso, agravaram-se entre os professores as fragilidades para o ensino deste eixo, o que levou a geometria a ser abandonada pela escola, criando uma grande lacuna nessa aprendizagem, pois somente podemos ensinar o que sabemos.

Em 1996, surge a nova LDB, e, em 1997, foram publicados os Parâmetros Curriculares Nacionais, que, para os professores, em destaque os do Distrito Federal, representam uma grande oportunidade de discussão a respeito das suas práticas pedagógicas, reflexão sobre objetivos do ensino fundamental, e proposta de conteúdos a serem trabalhados com seus critérios de avaliação. Os PCN apresentam a preocupação do ensino de construções geométricas, e passam a usar a expressão *espaço e forma* como um bloco de conteúdos.

Dentro desse bloco, aparecem os conceitos geométricos para desenvolver um tipo especial de pensamento que permita ao aluno compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. As noções geométricas voltam-se para a observação, percepção de semelhanças e diferenças e identificação de regularidades, envolvendo a exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato. (PCN, 1997)

O currículo oficial da Secretaria Estado de Educação do Distrito Federal, em consonância com o disposto nos PCN, destaca a seguinte orientação para o ensino do bloco *Espaço e Forma*:

> O estudo do espaço, da localização e do deslocamento, das representações dos objetos no mundo físico, a geometria das medidas e proporções são conteúdos a serem desenvolvidos no ensino da Geometria. Esta é uma área do saber em estreita relação com as grandezas e medidas, por isso é preciso realizar atividades para integrá-las no trabalho didático. O trabalho com situações de localização e deslocamento sempre irá demandar a ação do estudante no espaço vivido. Atividades de caça ao tesouro, de planta baixa, de representação de um lugar, de leitura de um mapa exigem o desenvolvimento de habilidades geométricas. (Currículo em Movimento p. 73, 74)

A partir desta visão do ensino de geometria, optamos por propor discussões que ampliem, com novas metodologias, as possibilidades de entendimentos dos conteúdos curriculares.

O desenvolvimento do pensamento geométrico

Diante da necessidade de levar aos alunos a compreensão de conceitos relativos à geometria, o professor tem se utilizado de recursos didáticos como: sólidos geométricos, ilustrações de figuras planas, planificações e construções de materiais, que estimulam a formação de uma imagem mental sobre o objeto e estabelecem algumas propriedades a serem estudadas. Tais recursos didáticos têm permitido que as crianças desenvolvam conhecimentos relativos a propriedades das figuras, mas poucas reflexões sobre o espaço vivenciado.

Entendemos que, nos estudos a respeito das questões geométricas, o professor, antes de propiciar o contato e construções de e com materiais manipuláveis, deva permitir aos alunos a observação atenta da geometria presente no ambiente que os cerca: que formas enxergamos na natureza? Nas construções humanas? Qual a forma das flores? Das montanhas? Da sua casa? Estes elementos são formados por retas ou curvas? Quais figuras os compõem?

Ao realizar problematizações diante destes aspectos do ambiente vivido pela criança, mediando o desenvolvimento de conceitos a respeito dos espaços e das formas geométricas, nos aproximamos da visão vigotskiana, em relação ao papel do professor como organizador das ações pedagógicas e agente de provocações.

Gerdes (1992) defende, que a principal razão do sistema de numeração ser mais investigado que o da geometria decorre dos diferentes recursos linguísticos utilizados no primeiro. Como, por exemplo, palavras indicativas de quantidades ou frases designando processos de contagem e comparação presentes na vivência, desde a primeira infância. Essa é uma possível razão para existir uma maior reflexão a respeito do conceito de números do que dos conceitos geométricos.

Mesmo dentro dessas limitações, foram estudados padrões geométricos presentes em culturas diferentes de artesões - que elaboraram cerâmicas ou cestarias - e das formas geométricas da natureza, como os contornos do sol, da lua, do arco íris, das corolas das flores, e dos animais, como as celas de colmeias das abelhas e as belíssimas teias das aranhas. "A geometria é eterna.". (GERDES, 1992, p. 14).

> Os corpos materiais e as suas formas e relações espaciais existiam já antes do Homo Sapiens. O contorno do Sol e da Lua, a superfície plana dum lago, a retiliniedade de um raio de luz, etc. estiveram sempre presentes e ofereceram, por assim dizer, ao homem a possibilidade de os observar. Mas, na natureza nunca existem círculos, retas ou triângulos exatos. Por isso é claro que a razão principal para que os homens, gradualmente, tivessem elaborado estes conceitos resida no fato da observação da natureza não ser uma observação passiva, mas sim ativa: para poderem satisfazer as suas necessidades diárias, os homens produziam objetos cada vez mais regulares (Gerdes, 1992, p.18).

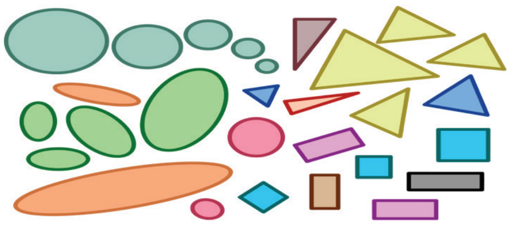
Um exemplo desse objeto é o machado de pedra, que para ser fabricado demandou uma sequência de operações, o que provocou transformações das funções mentais mais altas, por exemplo, atenção e memória. Com o desenvolvimento do pensamento, esses martelos passaram a ser menores e mais elaborados, com uma forma geométrica simétrica e regular.

Outro interessante exemplo, de Paulus Gerdes, foi a dobragem transversal de uma folha - que leva a uma linha reta - ou a separação de cada metade da mesma em tiras para construção de cestos simples utilizados no transporte de peixes. Nessa construção eram feitos entrelaçamentos, passando a dar origem a percepções que levaram ao desabrochar de conceitos geométricos. Para cada fase desses entrelaçamentos, surge o questionamento: quais considerações de natureza geométrica possibilitam reflexões e ações para se chegar à fase seguinte? Com o desvelar do pensamento geométrico oculto nas técnicas cotidianas, torna-se possível cogitar o despertar histórico da geometria.

Atualmente, situando o conceito de pensamento geométrico, PAIS (1996, 2000) defende a existência de quatro elementos que se relacionam entre si: objeto, conceito, desenho e imagem mental. O objeto, como uma ferramenta apresentada para os alunos manipularem de forma concreta. Manipulação não só lúdica, mas problematizadora. Essas experiências possibilitam a construção de conceitos. O desenho, que apoiado principalmente na manipulação de materiais tridimensionais, se constitui de diferentes representações, geradas pelas possibilidades diversas de perspectiva. E, por último, criar a imagem mental de uma figura, descrevendo as suas propriedades.

No entanto, o ensino de geometria tem enfatizado a percepção de figuras planas somente em posições padrões. Isso tem levado a criança a apresentar maiores dificuldades em reconhecer e desenhar figuras não planas do que planas, ou seja, sua forma de ver é restrita. Dessa forma, cria-se uma imagem mental reducionista. (PAIS, 1996, 2000). Em contraposição a esta perspectiva de ensino, os PCN já apontavam a necessidade de propor situações em que o aluno esteja em contato com as formas geométricas e percebê-la por meio de diferentes pontos de vista.

> Essa capacidade de deslocar-se mentalmente e de perceber o espaço de diferentes pontos de vista são condições necessárias à coordenação espacial e nesse processo está a origem das noções de direção, sentido, distância, ângulo e muitas outras essenciais à construção do pensamento geométrico. (PCN, p. 81)



Locomoção, movimento e distância no espaço

Você tem dificuldades de localização em um shopping? Você já perdeu onde está o seu carro no estacionamento? Estas são situações vivenciadas por várias pessoas no seu dia a dia. Para transpor esta situação, podemos utilizar pontos e placas de referência, a trajetória do estacionamento até a loja inicial visitada, a listagem dos percursos tomados ou outras possibilidades.

Para dar informações sobre pontos de referência, direção e sentido é necessário reconhecer sua própria posição e a posição dos objetos no espaço.

Atividades de reflexão e representação, escritas e dialogadas, podem auxiliar a criança a compreender sua localização e de outro e as distâncias que os separam. É necessário refletir sobre a distância ideal (que seria percorrida por um pássaro em linha reta entre os dois pontos) e as distâncias possíveis que contornam os obstáculos existentes.

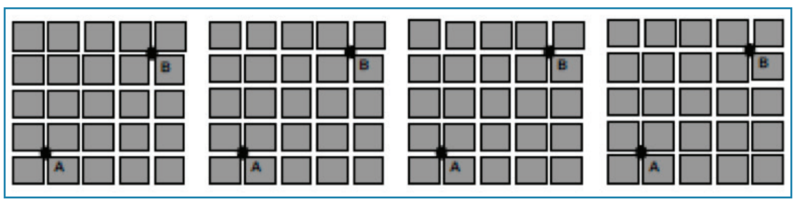
A localização de um objeto pode estar relacionada a movimentos que realizamos ou trajetórias que seguimos, e também a distâncias percorridas. Movimentos no plano é um conceito incorporado à Geometria. Trajetória também está incorporada a problemas geométricos, representada por um segmento retilíneo ou em curva, ou mesmo por um caminho resultante de uma sucessão de segmentos adjacentes, retilíneos ou curvilíneos.

Apesar de a palavra deslocamento poder substituir a ideia de movimentos e trajetórias, e de aparecer em documentos como os PCN (1997, p. 122) e no Caderno PNAIC 5, de Geometria (p. 5), e no Currículo em Movimento do Distrito Federal (p.73), vamos evitar a mesma, devido ao significado muito delimitado e preciso que assumiu na Física, como *a variação entre o ponto de partida e o ponto de chegada de algo que se move.* Nesse sentido, sempre que o ponto de saída coincide com o ponto de chegada, temos um deslocamento nulo, e isso não satisfaz as situações geométricas com que lidamos.

A distância é definida em geometria como a medida do menor trajeto entre dois pontos. Se forem dois pontos sobre um mesmo plano, é a medida de um segmento retilíneo unindo os pontos. Entretanto, em muitos problemas matemáticos, a noção de distância entre dois pontos é outra: para um pedestre ou um motorista, é o comprimento da menor trajetória que ele pode fazer para ir de um ponto ao outro. Essa trajetória está sujeita à necessidade de contornar obstáculos, como um lago, ou de respeitar o sentido da mão autorizada naquele trecho.

Interagindo com a figura abaixo, tente responder as seguintes questões:

Qual o caminho mais curto? Qual o caminho mais longo? Quantos caminhos diferentes para ir do ponto A para o ponto B? Qual a distância matemática entre os mesmos?



Fonte: Página 11 – Módulo PFPM – 1º e 2º ciclos - Lisboa - 2007.

Esta figura permite a localização de pontos como A e B, em destaque. Por meio de segmentos retos, podem-se percorrer diferentes caminhos entre esses dois pontos nessa representação.

Professor: Outra atividade interessante seria o *Jogo da tartaruga*, atividade inspirada na linguagem Logo. Veja o site e siga as instruções para baixar: <http://www.nied.unicamp.br> do Nied – Unicamp para quem quiser instalar o LOGO.

- Clicar no Slogo 3.0;
- Preencher a identificação;
- Abrir o email e clicar no link recebido;
- Vai aparecer uma janela clicar em setup-exe;
- Abrir;
- Colocar no desktop;
- Após colocar no desktop siga os comandos para criar figuras geométricas!

Em atividades de localização de um aluno, dentro da sala de aula, todos os pontos de referência como: armário, janela, porta, carteira de cada criança, mesa do professor, quadro, lixeira, podem ser explorados. O professor pode estimular as crianças a descrever de qual lado ele está em relação a cada referência. Direito ou esquerdo? Perto ou longe de algum objeto ou ponto?

A ação pedagógica que envolve localização espacial e a orientação, porque possibilita às crianças efetuarem oralmente ou graficamente, a sua descrição da posição dos objetos e de pessoas, interpretando e elaborando códigos para representar o local ou o trajeto desses objetos.

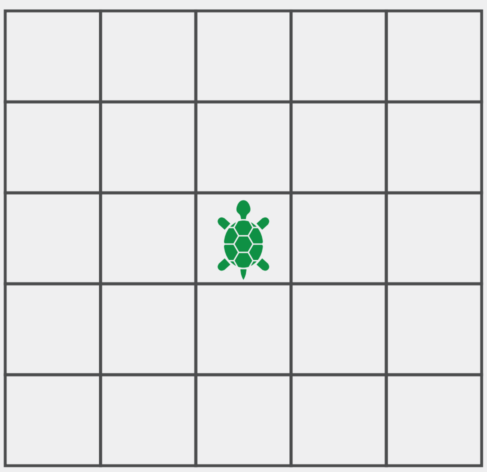
Atualmente, os jogos nos celulares ou computadores estão desafiando novas formas de aprendizagens. Segundo os PCN (1997, p. 35):

> O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. O trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as.

Nesse contexto, percebemos que crianças e jovens apresentam hoje uma grande habilidade com seus celulares e aplicativos, como *Pokémon Go*, que representam virtualmente distâncias e movimentos.

Fonte: imagens da internet.

A tartaruga, do *Jogo da tartaruga*, atividade inspirada na linguagem Logo citado anteriormente, inicia, conforme ilustração abaixo, em uma localização cartesiana 0,0. A partir desse ponto de referência, cria-se movimentos para a construção criativa e formativa através de figuras geométricas e desenhos de seu interesse.


Jogo da Tartaruga.

O jogo da tartaruga é um facilitador na compreensão de comandos, como, Para Frente (PF), Para Trás (PT), Para Direita (PD), Para Esquerda (PE), que ao serem compreendidos constituem conceitos importantes para a percepção e a localização baseado na Linguagem LOGO. Essa linguagem de programação, criada por Seymour Papert, é de fácil compreensão para a criança, permitindo o desenho de figuras geométricas e a partir delas o desenvolvimento da criatividade e a construção de conceitos relacionados ao espaço e o estudo de formas.

Afinal, onde podemos perceber a geometria no Espaço Físico?

Grande parte dos conhecimentos geométricos se apresenta em problemas espaciais, ligados à medida de espaços físicos; entretanto, a construção de objetos geométricos e o desenvolvimento da geometria como área da matemática, desligaram-se dos espaços físicos e passaram a estabelecer estudos de objetos teóricos, com regras de atividade matemática, como as figuras geométricas, retângulo e quadrado, que foram criados para modelar as formas físicas. Uma mesa quadrada não tem os quatro lados iguais como um quadrado apesar da superfície da mesa ser plana.

Essas duas geometrias do conhecimento geométrico e do conhecimento espacial apresentam três diferenças. A primeira é que nem todos os conhecimentos espaciais se tornam objetos matemáticos, alguns de uso social são de estudo do espaço físico e não faz parte da matemática, como a interpretação de mapas e planos. A segunda, o conhecimento geométrico, parte dos espaços teóricos para validar os resultados, ou seja, argumentativo, e os conhecimentos espaciais, não necessitam respeitar regras geométricas, pois a maioria dos problemas é de natureza empírica. As crianças constroem conhecimentos práticos permitindo dominar as suas locomoções e construir sistemas de referência, como chutar uma bola ao gol ou ir do quarto ao banheiro não usam conhecimentos matemáticos, são conhecimentos espaciais.

E a terceira diferença, o conhecimento geométrico da matemática com a sua construção intuitiva precisa de uma preparação didática para o saber, isto é, da geometria intuitiva até a geometria aprendida na escola (Broitman e Itzcovich, 2003).

Abaixo apresentaremos a primeira sequência para o ensino de geometria cujo foco trata de explorações didáticas para o ensino de trajetórias e localização no espaço.

Sequência didática: A geometria no espaço

TEMA: Trajetórias e localização

Objetivos

- Conhecer alguns dos principais instrumentos de localização e orientação;
- Enumerar as várias formas de orientação existentes;
- Comparar os tipos de orientação utilizados pelo homem, como a bússola e o GPS;
- Expor conceitos da importância da localização e orientação para o ser humano.

Material necessário

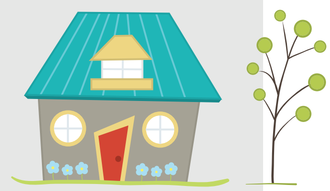
- Texto e enigma (abaixo);
- Bússola confeccionada com os alunos;

- Celular;
- História em quadrinhos (texto).

Aprofundando o Tema

Nessa sequência didática sobre geometria: a geometria nos anos iniciais tem dois campos importantes a serem trabalhados em sala de aula: a geometria das trajetórias e a geometria das formas. Nesta sequência as atividades intentam desenvolver o pensamento geométrico a partir da localização, dos movimentos e das trajetórias. Desenvolver tais habilidades são essenciais para a vida social das crianças e dos adultos: localizar informações em tabelas, chegar em um endereço, se situar espacialmente nos ambientes diversos, são alguns exemplos de atividades práticas no campo da geometria das trajetórias.

1º Momento: trabalhando vizinhança



- Construir maquete de uma rua (cada aluno monta uma casa);
- Cada aluno deverá numerar ou nomear sua casa;
- Produza atividades de exploração com os vizinhos:

Casa: entre a direita, a esquerda, antes e depois, duas antes, quatro depois etc.

Trabalhar sucessor e antecessor.

Após muitas situações a partir da maquete explorar quadro numérico destacando os números vizinhos na diagonal, vertical e horizontal:

1) Qual a vizinhança de 56?
Acima 46, abaixo 66, a direita 57 (sucessor), a esquerda 55 (antecessor), nas diagonais: 65 e 47 e 45 e 67

2) Perceber as regularidades:
a. Abaixo sempre mais 10
b. Acima sempre menos 10
c. Sucessor sempre menos 1
d. Sucessor sempre mais 1
e. Diagonais: + ou – 9 e + ou - 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

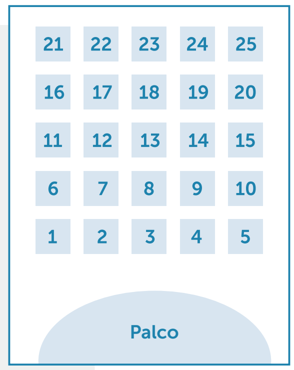
Outra sugestão de atividade

Tente nomear, de acordo com as informações:

1. Está entre Pelé e Ednaldo Pereira ______________________________
2. Está à direita de Marilyn Monroe ______________________________
3. Não estão ao lado Lady Gaga ______________________________
4. Está acima de Kurt Cobain ______________________________
5. Estão no centro da imagem ______________________________
6. É a sexta foto da segunda linha ______________________________
7. Sexta fileira, primeira linha é ______________________________
8. Última foto da esquerda para a direita, de cima para baixo __________

Na Prova Brasil você verá questões assim, em relação ao descritor: localizar objetos e pontos numa cena ou num mapa.

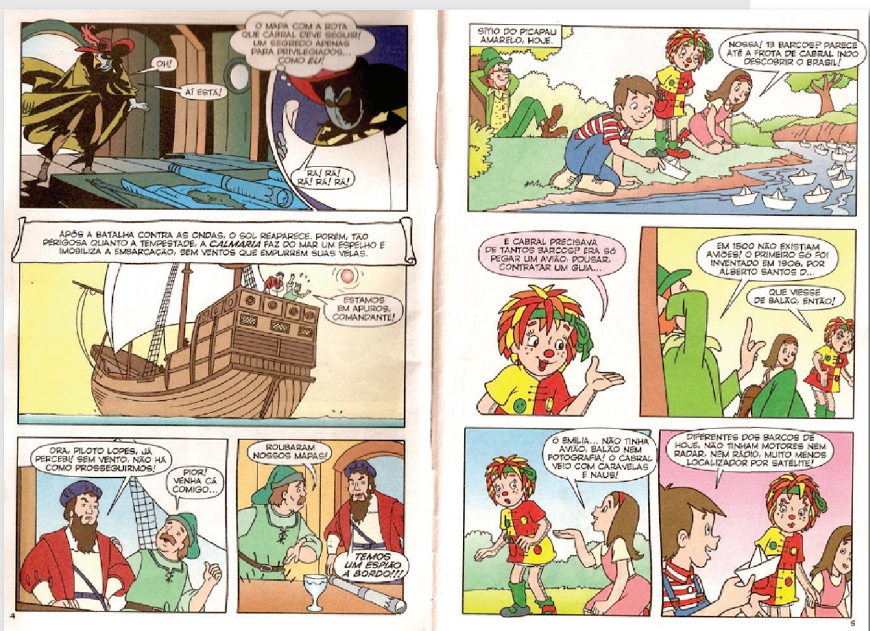
A figura mostra um teatro onde as cadeiras da plateia são numeradas de 1 a 25. Mara recebeu um ingresso de presente que dizia o seguinte: sua cadeira está localizada exatamente no centro da plateia. Qual é a cadeira de Mara?



2º Momento

Converse informalmente com os alunos salientando a utilização dos termos direita e esquerda para localizar-se e exponha o uso de localizadores de navegação e a necessidade de saber os conceitos de direita e esquerda para orientar-se. Leia e interprete o gênero textual história em quadrinho:

Questione com os alunos: Como Pedro Álvares Cabral chegou ao Brasil se não tinha GPS? Mas o que é um GPS?



Bússula	GPS
No ano em que o Brasil foi descoberto, o instrumento de orientação era a Bússola. Esse instrumento é constituído por uma agulha imantada*, que gira sobre uma rosa dos ventos, indicando sempre a direção norte. A bússola está presente em aviões e navios, auxiliando a tripulação a manter corretamente o trajeto da viagem. Além disso, muitas pessoas se orientam por esse instrumento para não se perder, por exemplo, ao explorar cavernas, florestas, desertos ou o fundo do mar.	GPS: sigla que, em português, significa Sistema de Posicionamento Global. Esse aparelho possui um receptor que capta sinais de pelo menos três satélites para definir sua posição. Os sinais informam a localização e a altitude de qualquer ponto na superfície terrestre. O GPS tem sido muito útil para o mapeamento de regiões de difícil acesso como os desertos, as zonas polares ou as florestas tropicais. Também auxilia na orientação de aviões e embarcações que trafegam, muitas vezes, com pouca visibilidade devido a nevoeiros, evitando, assim, a ocorrência de acidentes.

Você verá esse conteúdo assim na Prova Brasil:

Qual quadrante está localizado o bairro Abílio José?

a) A2

b) C1

c) C3

d) B2

3º Momento

Jogo: onde estou. Leve o mapa mundi para a sala de aula. Deixe-o de forma que os alunos possam visualizá-lo e consultá-lo com facilidade. O jogo é disputado por duas equipes, vence o jogo o time que marcar o maior número de pontos. Para fazer pontos, é preciso descobrir o nome do país onde está localizada a foto mostrada pelo professor. Caso a equipe em que o professor mostrar a foto não acertar a localização, o outro grupo pode tentar adivinhar. Professor, mostre a foto e posteriormente vá oferendo dicas aos alunos de localização para que os mesmos possam descobrir o país de origem da fotografia.

Ex: O país dessa fotografia está à direita/esquerda, etc...

Explorando formas planas e não planas

Humberto Bortolossi, professor da Universidade Federal Fluminense (UFF), ao discutir sobre o porque de se estudar geometria, destacou que construir um vocabulário a partir deste campo é importante, pois permite compreender situações de letramento e comunicação. Frases como: “Siga pela transversal”; “Formem um círculo”; “Siga em linha reta”; “Vamos comprar esses bancos de assentos circulares ou quadrados?”, só são compreendidas por meio do desenvolvimento de interpretações de formas geométricas e suas características. Para se comunicarem, as pessoas precisam destas palavras e dos conceitos a elas relacionados. É claro, certas profissões usarão mais geometria do que outras e podem existir benefícios indiretos.

Estudar as formas geométricas deve ir além da memorização de formas. Seus nomes tornam-se importantes para utilizar os códigos e notações geométricas para a compreensão do espaço vivido.

A escola apresenta muitas oportunidades para o despertar do conhecimento geométrico, através de experiências concretas presentes no dia a dia. Sabemos que boa parte dos professores inicia o ensino da geometria pelas figuras planas: quadrado, retângulo, triângulo e círculo, embora a orientação dos PCN e de muitos livros didáticos seja a de começar pelas formas tridimensionais. Neste contexto, concordamos com essas orientações curriculares e optamos aqui, no primeiro momento, pela proposta de Nacarato e Santos (2014), que abordam o uso da fotografia na sala de aula, relacionando as figuras planas obtidas e as formas tridimensionais observadas na realidade.

Nessa proposta, as crianças, em pequenos grupos, fizeram um passeio pela escola e fotografaram vários espaços da escola, como sala da direção, secretaria, pátio, sala de aula. Essas imagens foram analisadas na sala ou no laboratório de informática e os alunos reconheceram, nas suas fotos, principalmente, partes planas.

As crianças identificaram com certa facilidade as figuras planas padrão, que compunham os objetos tridimensionais, deixando de ter uma visão global dos mesmos. Além disso, surgiram confusões entre formas planas e tridimensionais: esfera/círculo; prédio na forma de bloco retangular/retângulo da fachada, telhados em formato de prisma triangular/triângulo frontal.

Percebemos que essas dificuldades decorrem, em parte, das dissociações entre figuras planas isoladas e as suas inserções nas formas tridimensionais reais. Para ultrapassar esta fragilidade, podemos pensar em algumas intervenções pedagógicas:

- *Construir formas tridimensionais padrão, analisando e estabelecendo relações entre elas e as formas da realidade.*
- *Estabelecer relações entre estas formas tridimensionais e as formas planas nelas presentes;*
- *Registro de descrições das formas, surgindo ideias sobre os elementos que as compõe: vértice, faces, arestas.*

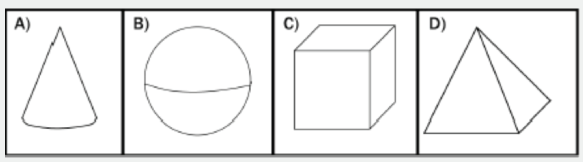
A próxima etapa dessa proposta foi que os alunos, usando a máquina fotográfica ou celular, refizessem o percurso pela escola e fotografassem objetos semelhantes às formas tridimensionais: corpos redondos, primas, cubos e outros. Os alunos fotografaram caixa arquivo de papelão na secretaria, panela na cantina, extintor de incêndio, lâmpada fluorescente, lixo, caixa de fósforos, frasco de detergente. Após essa atividade, os alunos, mediados pelo professor, foram desenvolvendo entendimentos mais sistematizados a respeito das formas geométricas, aproximando de uma conceituação mais matemática. Podemos concluir com as crianças que as formas geométricas não planas: são todas as figuras cujos elementos não estão contidos em um só plano.

Professor: é importante que as crianças construam as principais formas tridimensionais: cubos, prismas, cilindros, com palitos, papel, moldes e outros. Após essa construção, tenham a oportunidade de descrever, identificar aspectos relevantes da forma, interpretar, através de diferentes pontos de vista, outras características.

Outra orientação pedagógica muito válida é que você pode buscar explorar no estudo de figuras planas muitas relações, como: formação de quadriláteros, hexágonos por meio de triângulos ou construção, em papel quadriculado, de formas diversas, observando regularidades e simetria no plano gráfico.

Diante de trabalhos como estes os alunos conseguirão compreender e resolver situações como as apresentadas na Prova Brasil, conforme exemplo abaixo:

Vítor gosta de brincar de construtor. Ele pediu para sua mãe comprar blocos de madeira com superfícies arredondadas. A figura abaixo mostram os blocos que estão à venda:



Quais os blocos acima a mãe de Vítor poderá comprar?

(A) A e C **(B) A e B.** (C) B e D. (D) C e D.

Nessa questão, exemplo do descritor 02, destaca-se o reconhecimento de propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos.

> Acreditamos que essa sequência de tarefas tenha contribuído para o movimento de circulação de significados geométricos para as figuras tridimensionais. Elementos como faces, aresta, vértices e bases foram sendo incorporadas ao vocabulário dos alunos. Esse trabalho foi fundamental para a exploração de figuras planas. (Nacarato e Santos, 2014, p. 63).

A geometria é um campo amplo para trabalhar com situações-problema, com a ação pedagógica o professor oportuniza a criança a interpretar, comparar e analisar as diferentes formas geométricas.

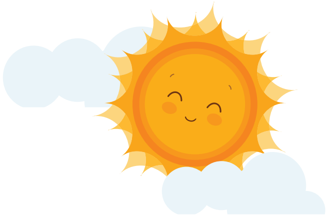
Escultura La Tête Carrée (A Cabeça Quadrada), do artista francês Sasha Sonso. Biblioteca Publica Louis Nucéra – Nice – França.

Para o ensino de geometria “explorar as características dos sólidos geométricos para, a partir da tridimensionalidade, abordar as figuras planas/bidimensionais, tem sido referência nos currículos mundiais” (NACARATO; SANTOS 2014, p.45). Com esta compreensão propomos observar a foto acima. A Biblioteca Pública Louis Nucéra, da cidade de Nice, aparece em primeiro plano, é uma figura não plana, mas na fotografia se configura como uma representação bidimensional. O professor deve aproveitar a idéia de trabalhar a fotografia e explorar as características da forma geométrica tão destacada, tanto as partes visíveis quanto as partes que possivelmente completam esta construção, mas que não estão sendo visualizados.

A observação da composição das figuras não planas, incluindo faces, tipos de ângulos, vértices e outros, é potencializada pelas formas da natureza e arquitetônicas e se torna acessível pela fotografia. Tal perspectiva de ensino é ressaltada nos PCN (p. 82).

> Os objetos que povoam o espaço são a fonte principal do trabalho de exploração das formas. O aluno deve ser incentivado, por exemplo, a identificar posições relativas dos objetos, a reconhecer no seu entorno e nos objetos que nele se encontram formas distintas, tridimensionais e bidimensionais, planas e não planas, a fazer construções, modelos ou desenhos do espaço (de diferentes pontos de vista) e descrevê-los.

Outras fotografias da arquitetura de Brasília, inclusive de obras criadas por Oscar Niemeyer, podem ser igualmente exploradas em sala de aula como possibilidade pedagógica de relacionar figuras não planas e planas.



Congresso Nacional

Teatro Nacional Cláudio Santoro

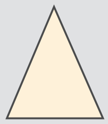
Catedral

Hotel Royal Tulip Brasília

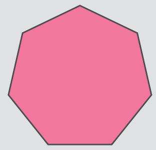
Ao observar as obras projetadas nestas fotos, que representam espaços tridimensionais, são inúmeras as possibilidades de exploração em relação ao pensamento geométrico, mas focando em figuras planas podemos destacar, a forma das faces, da base, as características destas formas encontradas e os conceitos relacionados, além de destacar a forma não plana presente em contextos reais. Veja as observações da foto abaixo:


Templo da LBV

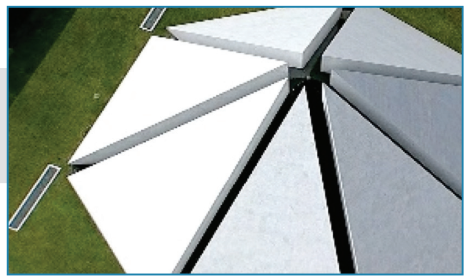
Faces triangulares



Base polígono regular de sete lados



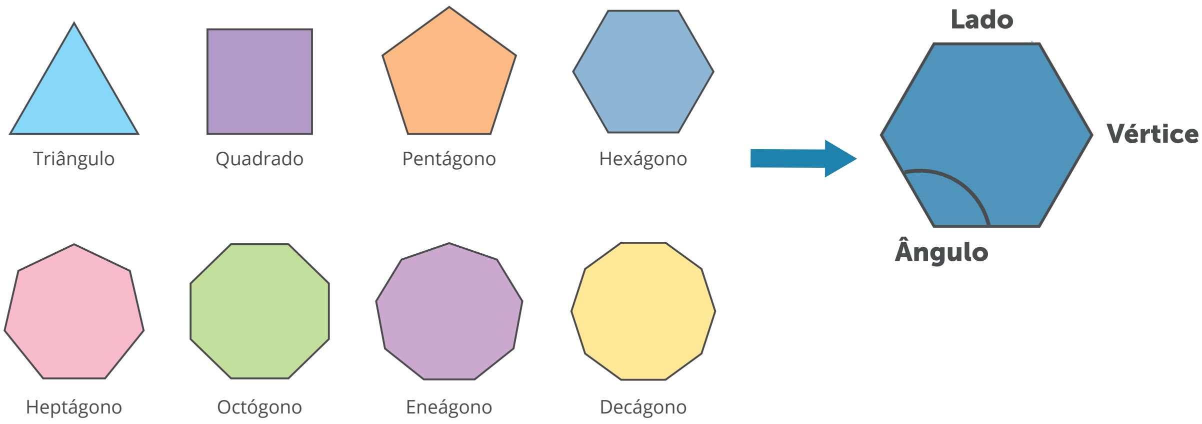
Forma tridimensional Pirâmide
(Poliedro)


Templo da LBV

Professor: após apreciar a foto do Templo da LBV, ponto turístico de Brasília, reflita sobre outras possibilidades de questionamento em relação à composição geométrica desta construção. Lembrando como já foi exposta a importância de realizar um estudo cujo ponto de partida são as formas não planas presentes na realidade e representadas por meio, neste caso da fotografia, para depois a percepção das formas planas.

Apresentar aos alunos formas geométricas, fugindo das formas tradicionais, pode ser uma transição interessante, entre a observação da natureza e dos espaços construídos pelo homem e suas releituras, nessa proposta os alunos através das suas imagens mentais, devem classificar formas, com seus próprios critérios e observar as características presentes em cada uma. Os professores devem incentivar aos seus alunos atributos geométricos, como: número de lados, se são curvos ou retos, quantidades de vértices. Os atributos não geométricos como cor e texturas devem ser desconsiderados. A variável didática dessa proposta pode provocar ao aluno a descrever os critérios estabelecidos por eles e suas conclusões, ampliando suas possibilidades argumentativas e o vocabulário em relação à geometria.

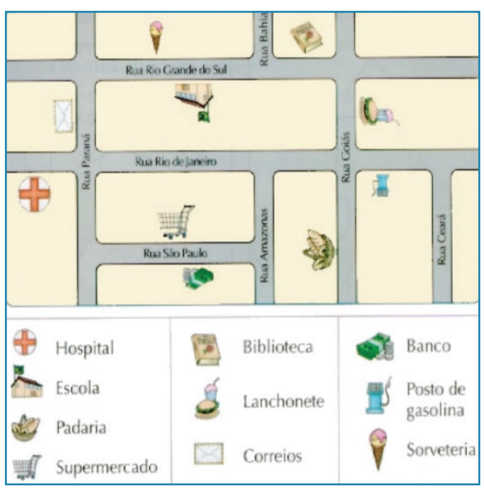
Iniciando o estudo de formas planas, segundo o Currículo em Movimento, é conteúdo previsto para os alunos do segundo ciclo, conhecer polígonos, que são formas planas, compostas por lados fechados que não se cruzam. Os polígonos são compostos por elementos: lados, ângulos e vértices, que os diferenciam. Observando os polígonos abaixo destacamos o hexágono:



Professor: ao propor aulas sobre polígono reflita com seus alunos sobre as seguintes questões:

- Existe relação entre o total de lados e o total de vértices de um polígono?
- Quais as relações que há entre o número de lados e a medida dos ângulos internos de um polígono?

Salientando, o estudo dos lados e as possíveis relações que os mesmos podem ter em um polígono é interessante perceber questões como paralelismo, congruência e perpendicularismo. Para entendermos estes conceitos observem o desenho de um mapa:



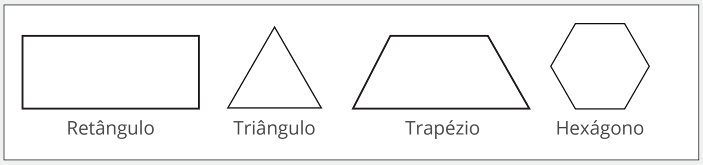
A Rua Rio Grande do Sul é paralela a Rua Rio de Janeiro, pois em todos os pontos, a distância entre ambas será a mesma, dessa forma não haverá intersecção entre elas.

Já a Rua Goiás é perpendicular a Rua Rio de Janeiro e também a Rua Rio Grande do Sul, pois existe um ponto de intersecção que forma um ângulo reto, ou seja, com 90º (noventa graus).

Em relação a congruência, que seria a mesma medida entre duas ruas, neste caso em relação ao comprimento, podemos perceber como congruentes a Rua Amazonas e Rua Ceará.

Associado a estes aspectos e conceitos observamos o Descritor 04 da Prova Brasil, onde é destacado o reconhecimento de quadriláteros, pela relação entres lados paralelos, congruentes e perpendiculares, como aponta o exemplo abaixo:

Abaixo estão representados quatro polígonos.



Qual dos polígonos mostrados possui exatamente 2 lados paralelos e 2 lados não paralelos?

(A) Retângulo. (B) Triângulo. **(C) Trapézio**. (D) Hexágono.

Ressaltamos as possibilidades pedagógicas de aproveitamento da figura do mapa acima, principalmente em relação as conexões entre as geometrias, tanto das formas quanto da localização. Muitos conteúdos estudados no bloco Espaço e Forma recaem sobre estas possibilidades de leitura pelo ponto de vista da localização e também das formas, como veremos no texto a seguir, relativo a escalas, ampliação e redução de figuras em malhas quadriculadas.

Abaixo proposta de sequência didática para o ensino de figuras planas e não planas.

Sequência didática: Figuras planas e não planas

TEMA: figuras planas e não planas

Aprofundando o Tema

Como vimos no textorelativo ao tema figuras planas e não planas, explorar o espaço natural ou construído pelo homem é uma proposta pedagógica interessante, pois foge de tendências de ensino da geometria descontextualizada e focado na memorização de nomes de formas regulares e sua composição. Nesta sequência apresentamos algumas situações interessantes para as crianças com o intuito de aguçar o olhar na observação e manipulação de figuras não planas e planas.

Objetivos

- Identificar características das formas geométricas não planas e planas;
- Descrever objetos do mundo utilizando termos geométricos;

- Relacionar faces das formas não planas a figuras planas;
- Construir e conhecer o tangram: lenda e composição;
- Manipular e mobilizar conceitos matemáticos a partir deste quebra-cabeça.

Material necessário

- História do tangram
- Tangram de cartolina
- Quadros
- Barbante
- Fotos
- Vídeos (links disponíveis)
- Textos
- Atividades
- Palitos de dente
- Jujubas
- Canudos
- Durex colorido

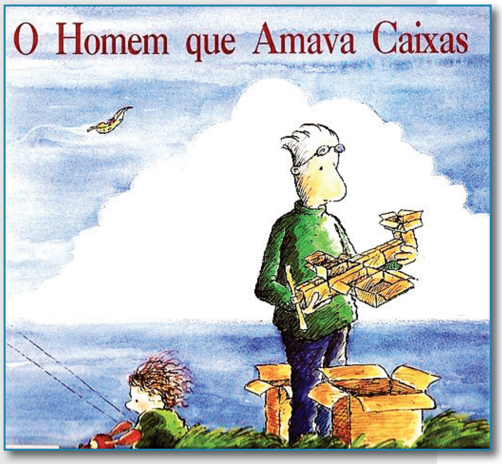
***1º Momento:* Afinal, onde podemos perceber a geometria no espaço físico? Explorando formas não planas.**

Professor, solicite que os alunos tragam caixas vazias para a aula.

Leia com os alunos o livro de histórias “O homem que amava caixas” (esse livro está disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=UJ1tnReCF74> ou na caixa do PNAIC).

Leia para os alunos o livro “O homem que amava caixas”. Realize a interpretação oralmente lembrando-se de explorar a capa, o título do livro e questões relacionadas aos três níveis de leitura: objetiva, inferencial e avaliativa.

Convide os alunos a observar as caixas trazidas por eles e realizar comparações entre todas as existentes e a encontrarem uma que se pareça com a mostrada no livro.



Fonte: http://blogdaescolaecia.blogspot.com.br/2011/09/livro-o-homem-que-amava-caixas.html

Traga para o diálogo exemplos e fotografias de figuras não planas no mundo.


As Pirâmides de Chuéops, Quéfren e Micherinos


Planeta Terra


Congresso Nacional

Explore com os alunos as formas que compõe o lado das caixas, assim como das figuras apresentadas por meio de fotos. Utilize uma tabela para catalogar as figuras geométricas não planas e realize as comparações.

Observe os vários sólidos geométricos com superfícies planas e complete a tabela:

NOME	 CUBO	 PARALELEPÍPEDO	 PIRÂMIDE TRIANGULAR	 CONE
Número de faces				
Número de vértices				
Nome da figura da base				

Fontes: https://pt.slideshare.net/reinecke.reis/slidos-geomtricos-12641471 e http://slideplayer.com.br/slide/6056585/

Mostre imagens aos alunos de onde podemos encontrar representações das figuras geométricas não planas.


Congresso Nacional


Museu do Louvre

Torre Eiffel

Cúpula do planetário da Gávea

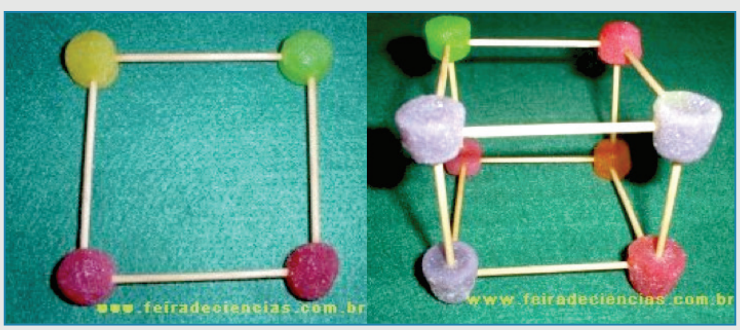
Fonte: https://www.slideshare.net/kellyalaminos/projeto-poliedros

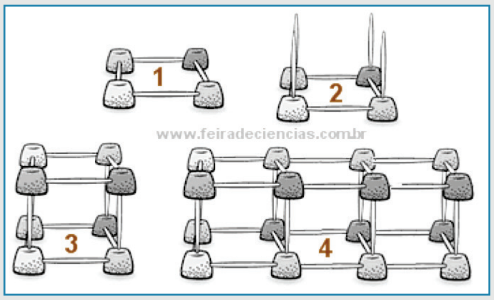
Assista ao vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=L_oOMl7iFB4 (Planificação dos poliedros) e sugira aos alunos que abram as caixas que trouxeram e as transformem em outros objetos.

***2º Momento*: Modelagem as figuras não planas com palitos de dente.**

Material: 1 saco de balas de goma (jujubas) e uma caixa de palitos de dente.

1. Comece com 4 palitos e 4 balas de goma. Espete os palitos nas balas para fazer um quadrado, com uma jujuba em cada canto.





2. Espete outro palito no topo de cada bala.

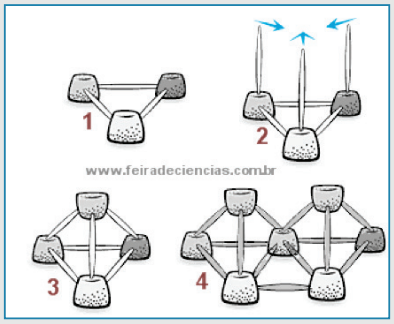
3. Coloque uma bala em cima de cada palito. Ligue estas balas de cima com palitos de dente para fazer um cubo. Um cubo tem um quadrado em cada lado (faces). Usa 8 jujubas nos cantos (vértices) e 12 palitos (arestas).

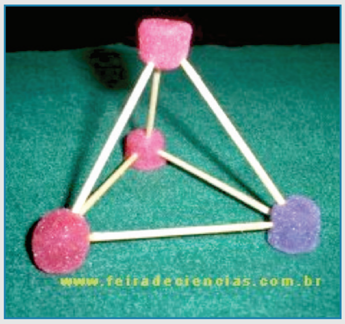
4. Use mais palitos e mais jujubas para fazer blocos de cubos. Quando a estrutura tiver cerca de 10 cm de altura ou de largura, tente mexê-la de um lado para o outro.

A sensação que você tem ao mexer com os blocos da estrutura é que ela parece ser uma estrutura sólida, rígida ou você a sente bem frágil?

Agora vamos fazer triângulos e pirâmides

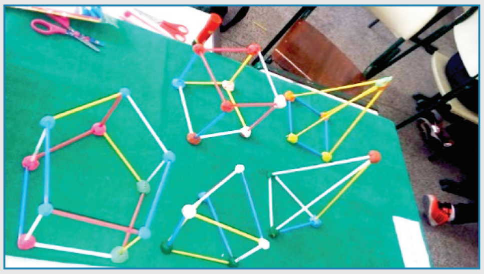
1. Comece com 3 balas de goma e 3 palitos. Espete os palitos nas balas para fazer um triângulo, com uma goma em cada canto (vértice).





Referência: http://www.feiradeciencias.com.br/sala27/27_11.asp

Outra possibilidade é a confecção de poliedros utilizando canudos e massinha de modelar.



Finalize com uma exposição dos objetos criados pelos alunos.

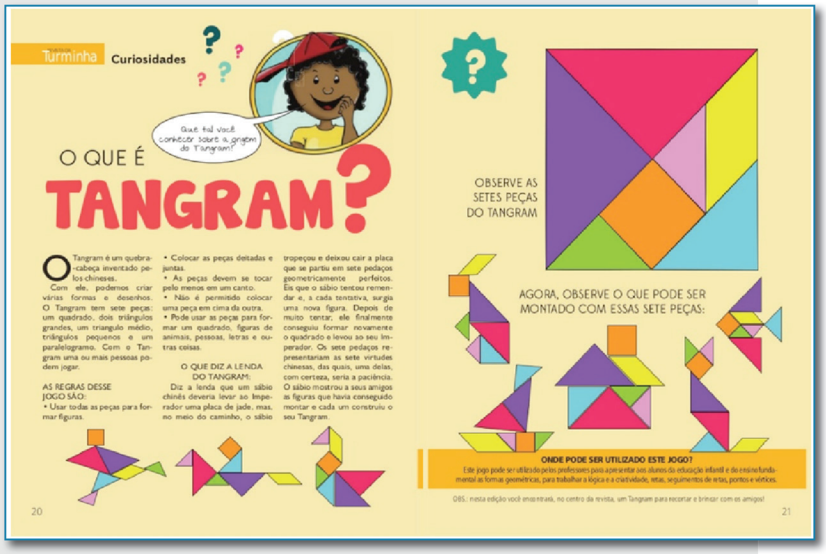
3º Momento: história do tangram e figuras geométricas

Realize a leitura da história do tangram com os alunos ou assista ao vídeo disponibilizado em <https://www.youtube.com/watch?v=I-RxCw_QdV0&t=4s>.

Ao finalizar a história do tangram, realize a sondagem para ativar os conhecimentos prévios dos alunos:

- Já conheciam o jogo?
- Sabem o nome dele?
- Alguém sabe como se joga?
- Vocês conseguem nomear as figuras que estavam no vídeo ou no texto?

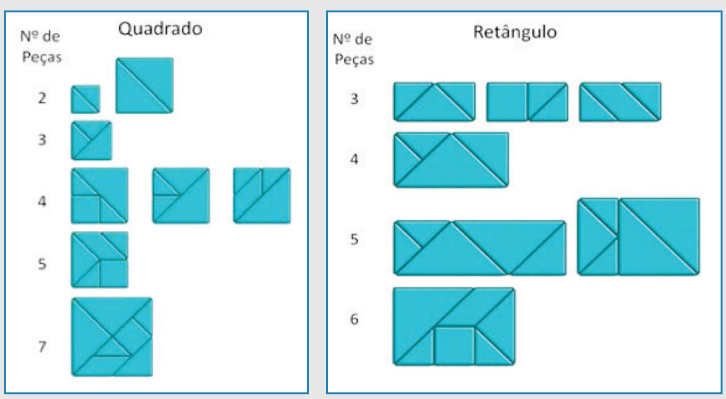
Distribua a turma em grupos (grupo de 4 alunos). Entregue para cada grupo as 7 peças do tangram.

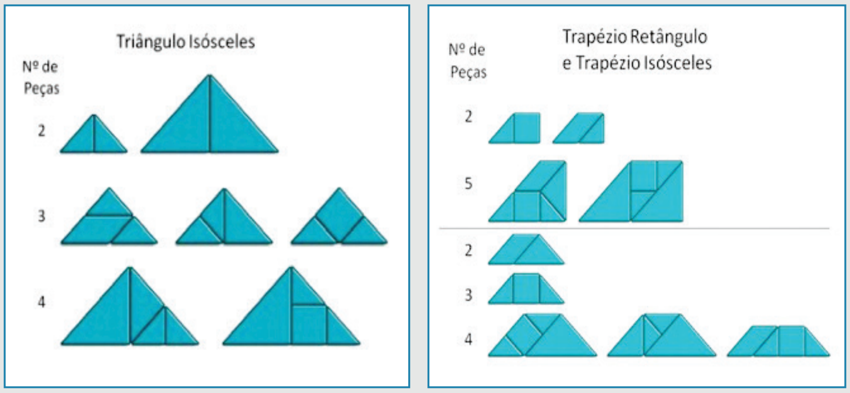


Fonte: <http://www.escolatangram.com/turminha2-impresso-20-638-2/> acessado em 23/04/2017.

Reforce o nome das peças que compõem o jogo do tangram. Desafie os alunos a construir um quadrado utilizando somente duas peças do jogo. Aumente a quantidade de peças (conforme a ilustração abaixo). Desafie os alunos na construção das figuras geométricas listadas pelos alunos anteriormente. Segue ilustração abaixo.

Estipule alguns minutos para que os alunos consigam realizar as atividades propostas.





Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=25696>
(acessado em 24/04/2017)

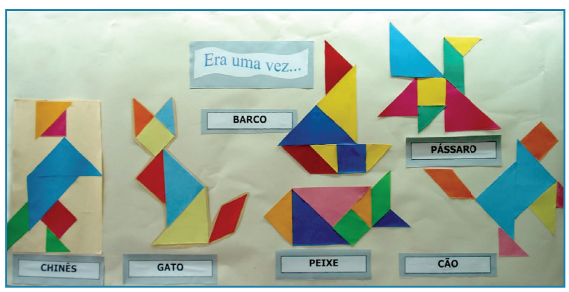
O professor Guilherme Erwin Hartung e a colaborada Rita Meirelles (que criaram as propostas acima), sugerem outros desafios na construção do quadrado (que podem ser utilizados para as outras figuras geométricas – com as devidas alterações).

1. Monte um quadrado com quatro peças usando apenas triângulos.

2. Monte agora outro quadrado com a mesma área do quadrado anterior.

   Inclua os retângulos.

Deixe os estudantes levantarem as hipóteses e trocar informações entre os grupos. Oriente os grupos para que possam chegar ao objetivo final. Outros desafios podem ser lançados para os alunos. Construa um mural com as criações dos desafios propostos para os alunos.



Fontes: <http://www.espacoeducar.net/2011/07/atividades-com-o-tangram.html>
e <http://eeattiliodextro.blogspot.com.br/2014_06_01_archive.html>.

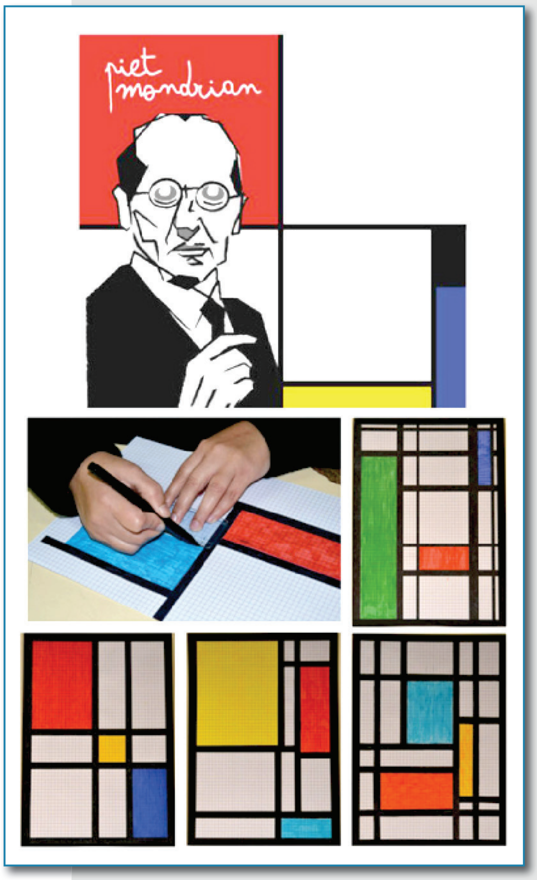
4º *Momento*: construindo retas perpendiculares, paralelas e oblíquas

Apresente aos alunos o quadrado do tangram utilizado nas aulas anteriores e mostre as retas do quadrado. Com auxílio de régua escolar peça para os alunos continuarem as retas dos lados da figura maior do Tangram (quadrado). Explore as características principais entre estas retas, buscando relacionar os termos: retas paralelas e retas perpendiculares. Trace a diagonal do centro do quadrado e também liste junto as ideias dos alunos as relações desta com as demais já destacadas.

Trace algumas retas perpendiculares, paralelas e oblíquas (lembre-se de nomear as retas para os alunos). Busque exemplos vindos dos alunos das retas traçadas no quadro.

Apresente aos alunos quadro do artista Mondrian que utiliza as retas para suas composições artísticas. Lembre-se de usar o nome das retas para que os alunos assimilem o termo matemático.

Desafie os alunos a realizar a releitura do quadro de Mondrian (Composição em Vermelho, 1930) utilizando-se das retas perpendiculares, paralelas e oblíquas – utilize a malha quadriculada para realizar a releitura. Lembre-se de ofertar aos alunos o contexto histórico e a biografia de Mondrian.



Fonte: <http://www.suapesquisa.com/biografias/piet_mondrian.htm>.

QUEM FOI

Pieter Cornelis Mondriaan foi um importante pintor modernista holandês. Nasceu na cidade holandesa de Amersfoort em 7 de março de 1872 e faleceu em Nova Iorque, no dia 1 de fevereiro de 1944. Mondrian é o fundador da corrente artística conhecida como neoplasticismo.

Biografia (principais momentos da vida do artista):

Desde jovem interessou-se por pintura, porém enfrentou a rejeição da família que era muito religiosa e encarava a arte como uma atividade pecaminosa. No início de sua carreira foi muito influenciado pelo impressionismo e naturalismo. Nesta fase, destacam-se as pinturas *Árvores ao andar* e *O Moinho Vermelho*.

Principais características do estilo artístico de Mondrian:

Sua obra foi influenciada pelo pensamento teosófico. Destacou-se com obras abstratas geométricas, principalmente trabalhando com formatos retangulares. Utilizou, em suas obras, principalmente cores primárias (vermelho, azul, branco, preto, amarelo). Mondrian considerava estas como as cores elementares do Universo.

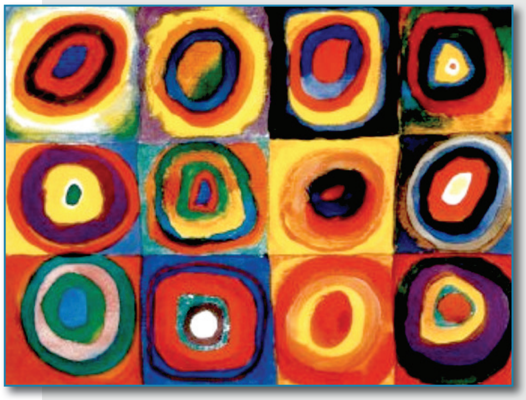
Principais obras de Mondrian:

Árvores a luz da Lua (1908)
Composição com cores B (1917)
Tabuleiro com cores claras (1919)
Composição com vermelho, amarelo e azul (1921)
Composição com amarelo (1930)

Finalize a atividade montando uma exposição das releituras feitas pelos alunos.

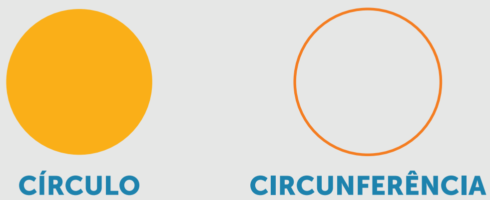
4º Momento: construindo o círculo e a circunferência

Leia com os alunos o livro "Kandinsky – tudo começa num ponto" (disponível em http://www.ccbbeducativo.com.br/cadernos/).



Proponha aos alunos a criação de um quadro único da turma baseando-se no quadro Círculo de Kandinsky. O desafio será feito com barbantes coloridos. Explique aos alunos que eles poderão escolher começar pelo círculo ou pela circunferência. Esse será o momento em que a explicação sobre círculo e circunferência será necessária.

Finalize a atividade expondo o quadro único.



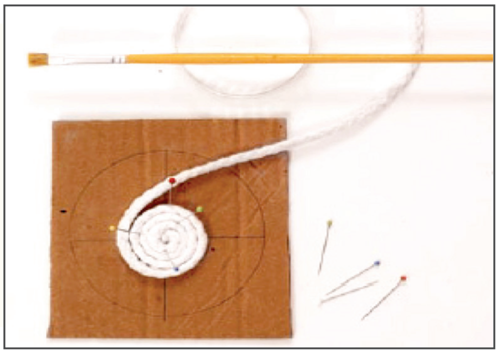
Fonte: <http://www.matematicaefacil.com.br/2015/07/diferencas-historias-curiosidades-circunferencia-circulo.html>.

Passo a passo para a releitura do quadro "Círculos":

Materiais necessários: barbantes coloridos, tinta guache, cola branca, pincel e alfinete.

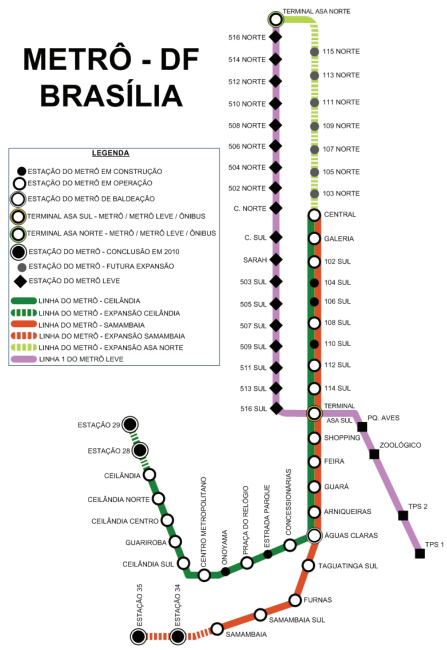
Risque um círculo de 9,5 cm de diâmetro no papelão. Peça que os alunos mostrem onde temos o círculo e a circunferência. Corte 1,50 m de barbante, espete uma ponta com alfinete no centro do círculo, passe cola num lado dessa extremidade e enrole. Lembre-se de pintar ou fazer a circunferência com uma cor diferente do círculo.

Fonte: http://www.mulhercriativa.com.br/artesanato/passo-a-passo-porta-copos-de-barbante (adaptado)



Ampliação e redução de figuras em malhas quadriculadas: possibilidades por meio da compreensão de escalas

As noções de escala são importantes para que as crianças possam interpretar e ler o globo terrestre, mapa mundial, do Brasil, do seu Estado, da sua cidade, do seu bairro, metrô, parques, shopping, enfim, que consigam compreender o significado de cada mapa em sua vida. As escalas podem ser variadas, dependendo do que está sendo estudado no momento. Vejamos o mapa do metro de Brasília:



O metrô de Brasília, apresentado acima é uma excelente proposta de estudo de escalas, além de interpretar eles poderão conhecer em loco, fazendo um percurso do início ao fim do trajeto, proporcionando uma noção clara do seu tamanho. Ao percorrerem a linha principal, as crianças poderão representar o mapa de seu percurso, localizando estações e cidades administrativas livres de escala.

Outro tema a ser estudado é a discussão em relação ao tamanho original e a representação feita por eles. Novamente poderemos utilizar as fotografias do percurso. O professor pode apresentar o mapa original e a escala utilizada. A importância de trabalhar as ampliações e reduções, por meio de escalas, decorrem da necessidade de leituras e interpretações de qualquer espaço que tenham que percorrer. Outro exemplo que será apresentado em Grandezas e Medidas será a planta baixa de uma casa com suas medidas e suas escalas.

Com a tecnologia midiática, presentes em telefones celulares e seus aplicativos de mapas, como, *Google Maps*, *Waze*, é possível adeterminar localização ou trajetos de lugares específicos apenas com o endereço, como já destacamos anteriormente. Esses aplicativos são excelentes para a sala de aula. A noção de escalas oferecidas por eles vão proporcionar um estudo e discussões que os próprios alunos vão ser estimulados a dar atenção ao que está a sua volta. Lembrando também que os aplicativos hoje usados para chamar um carro e os recursos que eles utilizam reforçam essa proposta para o trabalho em sala de aula.

A figura ao lado, representa uma tela do aplicativo *Waze.* Somente neste frame podemos evidenciar a distância em quilômetros entre do ponto em que se encontra o carro, destacado pela seta azul e o local de destino, na cidade de São Paulo, passando por Guarulhos. *Quanto cada quilômetro representa de forma escalar no mapa? Qual unidade está sendo utilizada nesta escala?* Segundo os PCN (1997, p. 83) “o uso de alguns softwares disponíveis também é uma forma de levar o aluno a raciocinar geometricamente”, além disso conteúdos presentes nos blocos Grandezas e Medidas, como medidas de comprimento, e Números e Operações, como o uso de números fracionários e decimais estão presentes neste estudo.

Outro aspecto importante ao tratarmos de escalas é a utilização de malhas ou redes para representar, no plano, a posição de uma pessoa ou objeto e ampliação e redução de figuras planas pelo uso de malhas. As malhas quadriculares é um material de fácil acesso e boa visualização para o aluno. Vejamos na figura abaixo que apresenta uma redução e ampliação de uma figura:

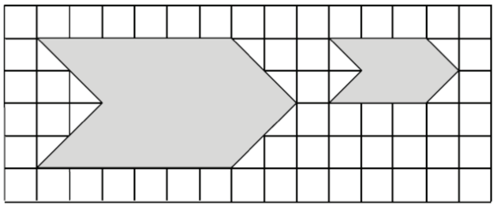
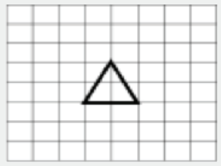


Fig. I Fig. II

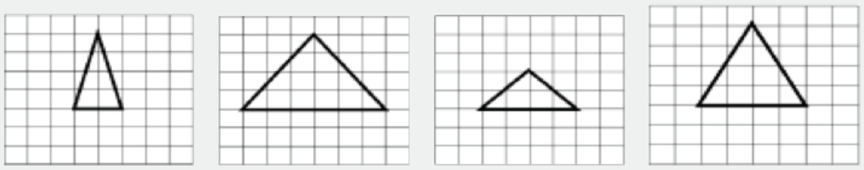
Considerando cada quadradinho 1 cm, independente do polígono, fica fácil a ampliação para 2 cm cada quadradinho ou 0,5 cm para redução. Sendo importante o professor retomar a questão de escala nesse caso de 1:2. Observando o aumento e a redução, podem ser exploradas, questões relativas a área ocupada e ao contorno da figura, ou seja, o perímetro. No conteúdo de Grandezas e Medidas falaremos sobre áreas e perímetro.

Na questão abaixo, exemplo do descritor 5, destaca-se o reconhecimento, a conservação ou modificação de medidas de lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.

A figura abaixo foi dada para os alunos e algumas crianças resolveram ampliá-la.



Veja as ampliações feitas por quatro crianças:



Ana | Célia | Bernardo | Diana

Quam ampliou corretamente a figura?

(A) Ana. (B) Bernardo. (C) Célia. **(D) Diana.**

Assim, como aprendemos o sistema notacional de escrita para ampliar as possibilidades de leitura e comunicação, ao estudar geometria desenvolvemos conhecimentos em relação a localização, as trajetórias, espaço vivido, formas que compões espaços naturais e construídos, exemplificados na leitura de um mapa, na construção de uma cerca, de uma casa, nas possibilidades de revestimento de um piso, na orientação para um endereço ou apreciação de uma obra de arte. Todas estas ações requerem conhecimentos baseados em sistemas, tanto numéricos, quanto geométricos, consequentemente, o despertar do pensamento geométrico nos alunos permitem outras possibilidades de interagir com o mundo.

Grandezas e Medidas: um ele entre formas e números

As medidas na vida e na escola

Que dia é hoje? Qual a altura desta parede? Que horas são? Qual a distância para chegar? Quanto de água cabe nesta garrafa?

Com certeza vocês já fizeram algumas dessas perguntas. Todos os dias temos algumas necessidades de ações que envolvem realizar certas medições e lidar com diferentes grandezas. Medimos o tempo, o espaço, os objetos e fenômenos que nos cercam.Mas, paramos para pensar o que é medir?

Observem a foto:

Fonte: imagem pública da internet

As duas crianças da foto estão comparando suas alturas, mas estão medindo suas alturas?

Para medir, além de comparar é necessário realizar uma contagem, ou seja, atribuir à grandeza um número, que envolva a escolha de uma unidade de medida e o emprego de procedimentos apropriados. Medir é uma tarefa que requer vários conhecimentos e ações. O conteúdo do currículo escolar do Ensino Fundamental exige do professor um trabalho que deve iniciar com a percepção de diferentes grandezas e as possibilidades de quantificações das mesmas, tendo como objetivo a compreensão e o uso do Sistema Legal de Medidas (SLM).

O bloco *Grandezas e Medidas*, proposto no currículo, deve ser vivenciado como um espaço de diálogo entre os campos da matemática. Quando falamos de medidas geométricas como comprimento e superfície muito conceitos da geometria deverão ser destacados. O estudo dos números racionais, nas suas representações fracionárias ou decimais, pode ser mais significativo a partir de medições e ainda, podemos analisar situações, como a cotação da moeda, a escolha de determinada medida para o comércio de determinados produtos a partir do campo do tratamento da informação, da visão estatística e probabilística das informações matemáticas.

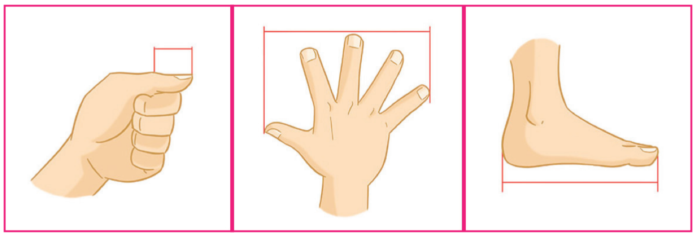
Neste contexto, levantamos algumas questões que devem ser discutidas:

- Como a humanidade construiu os conhecimentos matemáticos sobre medidas ao longo da história? Tenho me apropriado destes conhecimentos da história para organizar aulas que busquem desenvolver estas aprendizagens?
- Perceber, sentir e experimentar são ações importantes nas minhas aulas de matemática, em relação ao bloco *Grandezas e Medidas*?
- O que são grandezas e quais devem ser estudadas pelas turmas de 4º e 5º anos?
- Qual o papel das unidades de medidas não convencionais e das unidades culturais para a compreensão do conceito de medida?
- Como estabelecer um ensino do bloco *Grandezas e Medidas* em conexão a outros conteúdos da matemática como os números racionais e a Geometria?

Sugerimos iniciar este nosso diálogo sobre o bloco *Grandezas e Medidas* a partir destas indagações e reflexões.

O caminho para o Sistema Legal de Medidas

Na história da humanidade, o homem primeiro utilizou-se de unidades de medidas antropométricas, ou seja, baseadas nas partes do seu corpo (IFRAH, 1997). A palma da mão, a polegada e o passo são exemplos de algumas partes do corpo que embasaram unidades de medidas.



Fonte: imagem pública da internet

Uma das unidades da antiguidade mais conhecida é o cúbito, que corresponde a distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio. Muitos povos como os egípcios, assírios e sumérios se utilizaram desta medida, no entanto ela assumia distintos tamanhos nos diversos povos. As diferentes unidades de medidas, a partir da expansão comercial, das grandes construções, e da expansão territorial, se tornam uma problemática, pois o homem passa a perceber que não basta ter uma unidade de medida - é necessário criar uma convenção para as medições. O convívio em sociedade, a comunicação e as situações de negociação tornaram imprescindível a constituição de unidades de medidas padrões, convencionais.

Foi durante a Revolução Francesa (1789-1799) que a Academia de Ciências da França conduziu o projeto: *Sistema Métrico Decimal* e levou à institucionalização da unidade de medida padrão de comprimento, o metro.

Apesar de não serem **unidades** universais de medidas, as unidades estabelecidas nas conferências francesas foram aceitas oficialmente por vários países, inclusive o Brasil, que aderiu à *Convenção do Metro*, de 20 de maio de 1875, recebendo cópias das medidas legais que foram sendo adotadas.

No ano de 1983, em um congresso, também francês, conhecido como Conferência de Pesos e Medidas, convencionou-se uma medida para esta unidade e foi construído um modelo com uma barra de metal especial, mantida em condições de temperatura ideais para não sofrer deformações ou dilatações. Nesta mesma conferência científica, foram adotadas outras duas unidades básicas: o segundo como medida convencional de tempo e o quilograma como medida convencional de massa.

Esta necessidade dos países de estabelecer unidades convencionais de medidas nos faz refletir sobre a estreita ligação dos avanços comerciais e as mudanças na forma de organização política e econômica da sociedade, por meio da crescente globalização e a necessidade de precisão e padronização das unidades de medidas.

O percurso tomado pela humanidade para o estabelecimento de unidades padrões de medidas foi sendo desenvolvido conforme o modo de vida e as relações culturais construídas ao longo da história. Dessa forma, o ensino deste bloco da matemática escolar não pode deixar de considerar o que foi vivido pelo homem neste processo.

Buscaremos debater sobre a organização de um trabalho pedagógico voltado para a compreensão de conceitos relativo a medidas, acreditando que a aprendizagem de cada aluno ocorre a partir de perspectiva de ensino fundada na problematização, no desafio e desenvolvimento em meio às diferentes relações que o espaço escolar possa constituir, pois cada indivíduo constrói seus conceitos e interpretações de mundo, a partir das experiências que vive. (VERGNAUD, 2014).

Grandezas, o que são?

Apreciemos a obra de arte abaixo:

Fonte: imagem pública da internet

Nesta obra[5] do pintor realista colombiano, Khastulo Choperena, observamos uma rua de sua cidade natal. Analisando e comparando as construções expostas, surgem questionamentos como: qual o maior prédio? É o prédio de lateral amarela ou o prédio rosado à nossa frente?

Para responder estas questões somente a observação da figura impressa não é suficiente. E quando falamos em maior ou menor não estamos indicando exatamente o que queremos comparar, precisaríamos pensar: *maior em quê*? Na altura? No comprimento? Na área que ocupa?

Todos estes atributos, associados aos objetos e também aos fenômenos, chamamos de grandeza. Altura, massa, distância, superfície, tempo, dinheiro, temperatura, memória do HD[6] são algumas grandezas que manipulamos e medimos frequentemente.

Para compararmos ou medirmos relações entre objetos, seres ou fenômenos devemos observar qualidades comuns entre os mesmos. Não podemos comparar a altura de uma girafa com a medida da massa de um elefante. As grandezas dessa forma são atributos comuns que, em geral, aparecem associados a uma necessidade de medir.

A maioria das grandezas estudadas no segundo ciclo do Ensino Fundamental está associada a uma qualidade do objeto, mas o tempo e a temperatura que também são foco de estudos nesta faixa do ensino, são associados a fenômenos físicos. No trabalho com as diferentes grandezas, suas caraterísticas físicas devem ser observadas e a forma de percepção de cada aluno para compreensão de tal atributo não pode ser desprezada.

Voltando à pintura, se destacarmos a grandeza ALTURA dos prédios para ser medida, podemos perceber que a perspectiva impregnada nesta obra realista, que realça sua beleza, dificulta a

5 Obra realista de 2008, do pintor colombiano, Khastulo Choperena, título: *Calle De Cartagena* – Colombia.

6 Memória externa ou de armazenamento do disco rígido ou hard disk – HD de um computador, guarda aplicações e conteúdos salvos.

medição dessa grandeza a partir das percepções, tornando quase impossível a tarefa de medir a altura nessa representação pictórica da realidade.

Ao trabalhar medidas de grandezas, principalmente geométricas, como altura, superfície ou perímetro, é importante ao professor identificar e analisar as diferentes possibilidades de representação: objetos reais, objetos matemáticos e objetos pictóricos. Essa obra de arte faz uma representação pictórica do objeto real, como, por exemplo, o prédio, cuja altura, pode ter ainda uma representação matemática, como um segmento de reta, com determinado valor atribuído.

A maioria dos livros didáticos, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que são utilizados nas escolas, tem apresentado, a partir das reformas curriculares iniciadas com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), cada vez mais atividades e problematizações interessantes em relação ao bloco *Grandezas e Medidas*. No entanto, o livro se restringe à representação gráfica e matemática da realidade. Neste sentido, alertamos aos professores que ao realizar atividades com o foco na percepção de grandezas e cálculo de medidas é muito importante que possibilite a seus alunos a manipulação e experiências com objetos reais e em contextos interessantes em relação à necessidade de medir.

Construindo o conceito de medir... medindo

Nas aulas de matemática, nos anos iniciais, os alunos lidam com muitas contagens, seja por meio de coleções ou agrupamentos. Contar é uma atividade diária na sala de aula, principalmente durante o período de alfabetização. Ao medir, os alunos se deparam com outro tipo de contagem, do qual não estavam habituados, a contagem de quantidades contínuas.

Quando contamos o número de cadeiras de uma sala, os lápis de um pacote, os alunos em uma fila, estão contando quantidades discretas, ou descontínuas, ou seja, realizando uma contagem um a um. (PIAGET; SZEMINSKA, 1975).

Mas, como contar, por exemplo: farinha, tecido, água ou ar?

Ao lidar com grandezas como: comprimento, capacidade, massa, volume, temperatura ou tempo não conseguimos realizar contagens elemento por elemento, quantidades desta natureza chamamos quantidades contínuas. Para quantificar estas grandezas, utilizamos uma medição. Como já foi exposto, medir é comparar e atribuir um número, para tanto é necessário utilizar uma unidade de medida, esta unidade que será a mediadora da contagem.

As unidades de medida são selecionadas de acordo com a grandeza a ser medida, sendomais adequado que as mesmas se configurem como uma parte menor desta grandeza. Para medir o comprimento de uma sala de aula, por exemplo, a unidade escolhida pode ser passo, pé, pedaços de barbante, ou mesmo a unidade padrão, o metro. Estas unidades não convencionais ou convencionais se constituem como pedaços menores do comprimento. Medimos o tempo com intervalos de tempo, medimos a massa, com unidades menores de massa e a temperatura a partir da variação da mesma.

Ao medir, estamos contando quantas vezes é necessário tomar a unidade de medida de modo a preencher o espaço ou fenômeno a ser medido. Observando a tirinha da Turma da Mônica:

Fonte: imagem pública da internet

Ao interpretar a situação de mediação proposta na tirinha, a grandeza a ser medida é a distância (comprimento), a unidade utilizada foi a régua, e a contagem da medição foi sete, mas ao medir não podemos colocar apenas o número resultado da contagem, é importante destacar a unidade, assim o resultado da medida neste caso é sete réguas e não sete léguas como imaginado pela Mônica.Se utilizássemos de outra unidade de medida, como por exemplo, o passo, a distância não mudaria, mas com certeza a quantidade de passos não coincidiria com o número de réguas, daí a importância de destacar, no registro de uma medição, a unidade utilizada, pois o número do qual resultará a medição se condiciona à unidade escolhida.

Chamamos atenção ao fato de que medir também é contar, e certos materiais podem ser avaliados por meio de contagem discreta ou contínua. Como, por exemplo, feijões ou maçãs. Podemos fazer uma contagem um a um, mas também podemos medir a massa destes corpos, ou seja, uma mesma grandeza pode ser vista sob os dois aspectos. Para o desenvolvimento do conceito de número, e compreensão das formas de quantificação dos materiais, é importante a vivência com contagens de natureza contínuas e discretas.

A criança, aluna do segundo ciclo do Ensino fundamental, já experimentou, de acordo com a proposta curricular, algumas situações com o uso de medidas na escola, seja com unidades convencionais ou não. No entanto, nessa idade há ainda, grande necessidade de ampliar o sentido numérico por meio da criação e solução de situações de comparação, estimativa de medidas e medições do espaço real vivido.

As relações que estabelecemos com as medidas e grandezas no dia a dia, em geral, são de ordem prática. Medimos um espaço de um móvel com palmos ou passos, a massa de objetos com a percepção no balançar das mãos e dos braços, algumas distâncias pela percepção visual, entre outros exemplos de estimativas que utilizamos com certa frequência. Nem sempre temos à mão os instrumentos que possibilitam o uso das unidades de medidas convencionais e nos lançamos em situações de estimativas e aproximações.

Nesse contexto, o ensino grandezas e medidas não pode se restringir ao estudo do Sistema Legal de Medidas (SLM). Medir é uma ação do contexto social e assim deve ser tratado na escola. Com essas crenças, propomos que as situações para ensino das grandezas e medidas tenham em sua vertente principal o envolvimento em situações experienciais e argumentativas em torno do ato de medir, levando em consideração a percepção de tempo e espaço já desenvolvida pela criança.

Para que as crianças compreendam o que é medir, uma ideia é que o professor planeje aulas fundamentadas pela necessidade de medir e de manipular instrumentos, em um primeiro momento o mais próximo possível da criança (partes do corpo, objetos do convívio e outros), para depois instigar a necessidade de seleção e padronização de uma unidade de medida. Neste contexto, é interessante dialogarmos um pouco sobre a organização pedagógica das aulas sobre *Grandezas e Medidas*.

Pontos relevantes na construção de uma sequência didática para o ensino de Grandezas e Medidas

Como já falamos anteriormente, para o ensino de medidas, é interessante que o professor leve em consideração a relação que a humanidade estabeleceu historicamente para o desenvolvimento deste campo da matemática. Dessa forma, estudiosos e pesquisadores sobre o ensino desta área do conhecimento, como Machado (2000), Muniz, Batista e Silva (2008), Pontes (2009), entre outros, têm apontado em seus textos uma sequência de atividades e situações que possibilitem aos alunos uma melhor compreensão das medidas e grandezas estudadas.

De acordo com Brousseau (1996), importante pesquisador da Didática da Matemática e autor da Teoria das Situações Didáticas, o professor primeiro realiza um papel inverso ao do cientista, recontextualizando o saber, e trazendo para sala de aula situações que deem sentido aos conhecimentos que devem ser ensinados. Para Brousseau, é papel do professor propor situações em que a base de conhecimento já desenvolvida, seja insuficiente para alcançar estratégias e respostas adequadas, sendo necessário provocações que levem a criança à raciocínios seguintes e a modificações de conhecimentos existentes.

Levando em consideração as pesquisas desenvolvidas em relação ao ensino dos conteúdos do bloco *Grandezas e Medidas*, as proposições de Brousseau, e ainda, as orientações do Currículo em Movimento, organizador curricular em uso na rede pública de ensino do Distrito Federal, apresentamos pontos relevantes a serem considerados na construção de sequências didáticas para o ensino de diferentes medidas.

Essa sugestão pedagógica está composta de conceitos e conteúdos importantes no planejamento de aulas cujo objetivo é a compreensão de uma grandeza e sua medida. É importante destacar que não se trata de um modelo rígido e inflexível, mas um encadeamento de ideias norteadoras que devem ser consideradas a partir da realidade da turma e composta pelos conhecimentos pedagógicos de conteúdo de cada professor, com base em uma proposta de ensino reflexiva, problematizadora e fundamentada na experimentação.

Quais esses pontos relevantes?

1. Percepção da grandeza: sentir, perceber, conhecer, comparar, estimar, refletir e discutir sobre a grandeza estudada é um aspecto importante para que os alunos se lancem em situações de medidas. Comparando a grandeza em diferentes situações,o aluno a compreende e a identifica em contextos escolares ou não. Como por exemplo, ao estudar medida de massa, é importante que, sem medir, e antes que utilize uma balança, os alunos comparem a massa de diferentes objetos. A comparação e a estimativa estão ligadas a percepção de cada um sobre o espaço vivenciado e a referências utilizadas.

Ao iniciar o trabalho com essa grandeza, você professor, pode levar para a sala diferentes objetos com a mesma massa ou diferentes e pedir que os alunos classifiquem e ordenem. Você verá como os alunos podem ter opiniões bem divergentes ao realizar estas comparações.

2. Lançar mão de unidades arbitrárias: permitir que o aluno pense e escolha meios, instrumentos e unidades de medidas, antes que conheça a unidade padronizada, é muito importante para a construção de conhecimentos relacionados às possibilidades de contagem.

Ter que escolher uma unidade mediadora da contagem para quantificar uma grandeza, auxilia a criança a descobrir e construir processos mentais que o farão distinguir quantidades contínuas e discretas. Neste momento, assim como na história da humanidade, as partes do corpo podem ser as primeiras unidades a serem utilizadas pelas crianças, pois é utilizar a si mesmo como referência.

Na escola, podemos propor aos alunos que descubram o comprimento dos lados da quadra da escola. Em um primeiro momento os alunos deverão discutir e escolher uma unidade a ser utilizada por todos, por exemplo: passo. As diferentes contagens encontradas farão os alunos perceberem que a medição a partir de uma unidade arbitrária pode resultar em diferentes números, relacionados neste caso às diferentes alturas, tamanhos e aberturas de pernas. Com atividades problematizadoras como essa, o aluno vai refletir sobre as possibilidades limitadas das unidades arbitrárias, analisando que as mesmas servem para medidas em determinadas situações, principalmente para fins individuais, no entanto, insuficientes para a vida social. Poderíamos questionar ainda, qual referência é mais adequada de ser utilizada, o passo ou palmo. Verificando que a unidade mais adequada depende do que se quer medir.

3. Sistematização de unidadesde medida e instrumentos ao nível da sala de aula: antes de apresentar as unidades legais do país é significativo que as crianças pensem em conjunto como resolver o problema de diferentes números resultantes do uso de unidades arbitrárias. Em geral, as crianças passam a preferir trabalhar com algumas unidades que lhes parecem mais plausíveis. Por iniciativa própria ou mediada pelo professor poderão vir a eleger o passo de alguém da sala ou escolher um tamanho de barbante a ser utilizado por todos. Esse processo envolve a sistematização de unidade única pela turma.

Os alunos do segundo ciclo, por já terem vivido outras experiências de medição, na escola ou em casa, podem inclusive sugerir instrumentos e unidades de medidas do SLM. O importante é que a utilização da unidade escolhida pela turma seja resultante de uma necessidade vivenciada pela criança e não uma imposição. Neste percurso, serão alvo de debate a importância da padronização das unidades para evitar diferentes resultados para uma mesma medida.

Pensando em medida de capacidade, podemos propor a medição a partir de diferentes tipos de copos (unidade arbitrária).

Quais problematizações, você, professor, poderia fazer para a construção da necessidade de *sistematização de uma unidade de medida* pela turma? Reflita sobre estas problematizações e discuta com seus colegas.

Nesse processo de compreensão da medida, é relevante ainda a construção de alguns instrumentos com as crianças: tiras para medir, balanças de cabide, ampulhetas de garrafa ou relógio solar são alguns exemplos de instrumentos possíveis de serem construídos. Os alunos irão perceber que a relação de precisão com a medida efetuada, está relacionada não só à unidade sistematizada pela turma, mas também à escolha e uso do instrumento de medida.

Fonte: imagem pública da internet

4. Utilizando o SLM e instrumentos de medidas convencionais: o estudo do SLM de medidas não surgirá para a criança a partir da introdução de um conteúdo, mas será resultado de uma necessidade criada a partir das situações propostas pelo professor. Como já frisamos anteriormente, este percurso está presente na história do SLM e é importante que no momento de utilizarem as unidades de medidas padrão, tal história seja debatida, apresentada e investigada pelos alunos. As unidades que utilizamos hoje são as mesmas utilizadas pelos povos na antiguidade? No tempo da minha avó? Na infância dos meus pais?

Paralelos aos estudos do SLM aparecem os instrumentos convencionais, muitos deles já conhecidos dos alunos, mas muitas vezes sem embasamento sobre as formas mais adequadas de utilização.

Professor: a cada unidade estudada, apesar das dificuldades com transporte que você poderá encontrar, leve instrumentos de medidas diferenciados para a sala de aula, desde os mais usuais aos mais específicos utilizados nas diferentes profissões. Peça ajuda aos pais, muitos deles podem ter estes instrumentos em casa.

A partir do contato e uso das unidades do SLM, e dos instrumentos de medidas convencionais, podemos levar os alunos a reconhecerem a presença e a importância das medidas em outras áreas do conhecimento e nas diferentes profissões.

5. Subdivisão da unidade legal, principais múltiplos, submúltiplos e transformações: ao manusearem os instrumentos de medidas convencionais, a criança além de ter contato com as unidades legais começa a perceber subdivisões da mesma. Por exemplo: o quilômetro como uma unidade maior que o metro; o mililitro como uma unidade menor que o litro ou o grama como uma unidade menor que o quilograma. Essas outras unidades legais são resultantes da necessidade de medir coisas muito maiores ou menores do que a unidade padrão.

De acordo com o Currículo em Movimento, os alunos ao final do 5º ano devem resolver situações-problema significativas que requeiram transformações mais importantes e a descoberta de suas relações: comprimento (Km/m; m/dm; m/ cm; cm/mm; m/mm); superfície (m^2/dm^2 e dm^2/cm^2); massa (Kg/g; g/mg; t/kg); capacidade (L/ml); tempo: (h/min; min/segundo; dia/hora; semana/dia; mês/dia; ano/dia; ano/mês). Isso permite expressar uma medida com uma unidade adequada e compreensível aos alunos.

Percebe-se que o currículo já destaca os principais submúltiplos utilizados em nossa sociedade. Nos anos iniciais, não precisamos gastar energia e tempo nos debruçando sobre unidades pouco utilizadas como decâmetros, centilitros, milímetro quadrado ou hectograma. A ênfase deve ser nas unidades mais usuais.

Na Prova Brasil, em relação aos descritores 7[7] e 8[8] da área de matemática, que dizem respeito

7 Descritor 7: resolver problemas significativos utilizando unidades de medida padronizadas como km/m/cm/mm, kg/g/mg, l/ml.

8 Descritor 8: estabelecer relações entre unidades de medida de tempo.

a unidades de medidas convencionais e relações entre as mesmas, podemos encontrar situações como no exemplo abaixo:

A distância da escola de João à sua casa é de 2,5 km. A quantos metros corresponde essa distância?

(A) 25 m

(B) 250 m

(C) 2 500 m

(D) 25 000 m

Fonte: Matriz de referência Prova Brasil, MEC (2011)

Para compreender e resolver tal situação, além de conhecer as unidades legais, é importante que os alunos compreendam as relações estabelecidas entre a mesma e seus múltiplos e submúltiplos. Estas relações são muitas vezes estudadas na escola de maneira mecânica, por meio da memorização de tabelas, sem que os alunos percebam, de fato, a multiplicidade e a base de contagem existente.

Assim como o Sistema de Numeração Decimal, a base das relações da maioria dos múltiplos e divisores no SLM é dez. Dessa forma, é aconselhado que o professor construa situações para que os alunos analisem essa multiplicidade. O aluno precisa perceber, por exemplo, que o decímetro e o centímetro são menores e estão contidos dentro do metro e a cada 10 decímetros ou 100 centímetros consigo formar um metro. E, ainda, que 1 decímetro é igual a 1/10 (0,1) de metro e 1 centímetro é igual a 1/100 (0,01) de metro.

Na **Sequência didática: construindo decímetros e centímetros** proporemos atividades que levem as crianças a compreenderem esses submúltiplos do metro e as necessidades de ampliação da utilização dos números racionais em sua representação fracionária e decimal. A partir deste exemplo, destacado nesta sequência, você professor pode criar diferentes atividades com o foco no desenvolvimento dos alunos para a compreensão das principais transformações entre as unidades de medidas convencionais.

6. Relacionando o SLM às unidades culturais e a outros sistemas: este item aparece como ultimo da nossa sugestão de pontos relevantes para o ensino de Grandezas e Medidas, mas pode, de acordo com as atividades planejadas e com as questões apresentadas pelas crianças, aparecer em qualquer outro momento. As relações com as unidades culturais e com outros sistemas de medidas são também importantes e devem ser considerados.

Quem nunca foi à feira e percebeu vendedores medindo quantidades de produtos com latas ou garrafas? Bananas vendidas aos montinhos organizados na barraca? Quem nunca ouviu falar de léguas? Ou viu em filmes americanos placas com marcação de distâncias em milhas? Ou nunca ouviu falar do dólar?

Apesar de a maioria dos países ter adotado o SLM, inclusive o Brasil, em nossa cultura, muito diversificada por todo o território brasileiro, deparamos com várias unidades de medidas não legais sendo utilizadas, por uma aceitação e padronização realizadas em diferentes comunidades. Além disso, outros países também utilizam uma série de unidades diferentes das nossas. O principal exemplo são os diferentes padrões de moedas adotadas nos vários países. É importante trazer para sala de aula este contexto vivo na cultura e criar situações de discussão.

Até bem pouco tempo atrás, há exatamente 11 anos, aqui no Brasil comprávamos o pão e outros itens de padaria pela unidade. Após regulamentação do Instituto Nacional de Metrologia Legal, Normalização e Qualidade Industrial (Inmetro) e o Instituto de Pesos e Medidas (Ipem), o pão passou a ser vendido por quilo. Professor, reflita com seus alunos por que os comerciantes resistiram a esta mudança de unidade de medida. Será que os alunos conseguem perceber que muitas vezes o comércio utiliza as medidas para ter vantagens sobre os consumidores?

As medidas estudadas no segundo ciclo

Segundo as orientações curriculares, os alunos do segundo ciclo do Ensino Fundamental devem ter a oportunidade de desenvolver conhecimentos, em relação a grandezas e medidas, das medidas de: comprimento, superfície, capacidade, massa, tempo e sistema monetário. Nesta sessão, trataremos de cada uma dessas medidas, retomando alguns dos exemplos já utilizados e buscando ampliar a sua compreensão.

Em relação a cada uma destas medidas, desenvolveremos os aspectos matemáticos, buscando dialogar sobre as possibilidades pedagógicas para o ensino das mesmas.

Comprimento: grandeza e medida

Quais percepções os alunos já construíram sobre comprimento? Esta é a primeira pergunta antes de iniciar o trabalho sobre esta grandeza, pois pode ser que os alunos já tenham mais reflexões e conhecimentos do que supomos e, dessa forma, a organização destas aulas pode ter diferentes pontos de partida.

As medidas de comprimento são, antes de mais nada, processos constituídos pela humanidade na passagem da vida de nômade para a vida sedentária, quando o homem passa a plantar seu alimento e ter a necessidade de medir terrenos e distâncias.

Assim como outras grandezas geométricas, o comprimento tem relação com figuras presentes na geometria. Observando os dois pedaços de corda abaixo. Qual o maior em termos de comprimento?

Fonte: imagens públicas da internet

A situação proposta leva o aluno a pensar o que é comprimento e a se lançar no levantamento de hipóteses de possíveis estratégias ou respostas por meio de estimativa. O fato de uma corda estar mais enrolada do que a outra poderia gerar dúvidas maiores, pois as questões de conservação de quantidade também estariam sob questionamento (PIAGET; SZEMINSKA, 1975). As crianças poderiam achar que a segunda corda tem um comprimento maior, pois ocupa mais espaço ou então a primeira, por aparentar um volume maior.

Para responder qual corda tem o maior comprimento, não precisamos de fato medi-las, basta compararmos uma com a outra sem exatamente atribuirmos um valor. Podemos esticar cada corda, constituindo com elas figuras retilíneas e realizar o emparelhamento das duas. Mas, se a pergunta for: quanto maior? outro aspecto aparece, uma unidade de medida.

Medir comprimentos é medir segmentos. E as medidas arbitrárias mais usuais, como já apresentamos, são as partes do corpo. Os alunos poderiam medir as cordas inicialmente com palmos e, posteriormente, na continuidade do trabalho, com um metro ou régua escolar.

No processo de aprendizagem do conceito de medir comprimentos, conforme os pontos relevantes destacados para a construção de sequências em *Grandezas e Medidas,* passamos pela percepção, comparação de diferentes comprimentos, situações de estimativa, para depois adentrar nas medições com unidades arbitrárias e por fim legais. No entanto, o estudo dos instrumentos, por meio da construção e manipulação, também é uma parte significativa no estudo das medidas, em especial, das medidas de comprimento, pois muitas pessoas na fase adulta ainda têm dúvidas no uso de instrumentos como fitas métricas ou trenas. É comum as crianças questionarem se começam a medir a partir do número zero, ou do um, em uma régua, ou ainda se começam da extremidade ou do primeiro traço marcado. Por que dúvidas como essas aparecem?

Medir apresenta-se, frequentemente, como uma contagem de quantidades contínuas e que, muitas vezes, é realizada com a necessidade de números não naturais, pois o resultado de uma medição pode ser um número “quebrado” da unidade de medida utilizada. Para compreender que, no segmento do zero ao um, há uma quantidade, os alunos precisam entender uma característica complexa dos intervalos contínuos, a infinidade de pontos existentes. Porém, ao medir, estamos relacionando uma quantidade a um número e, dessa forma, utilizando conjuntos numéricos para determinar tal relação. Se utilizarmos apenas os naturais pode ocorrer de não haver nenhum número deste conjunto que expresse essa medida.

Neste contexto, o conceito de número, ainda em processo de construção, deve sofrer uma significativa ampliação no segundo ciclo dos anos iniciais, a partir da vivência com situações nas quais os números naturais não são suficientes para responder algumas delas, conforme debatemos na primeira parte de *Números e Operações* deste caderno. Dessa forma, além de entender melhor as medidas e as quantidades contínuas, os alunos deste período devem também compreender, por meio de diferentes usos, os números racionais positivos, seja em sua representação fracionária ou decimal.

A partir deste contexto, propomos uma sequência didática para a construção do conceito de medida de comprimento, utilização do metro como unidade padrão de medida e de dois de seus submúltiplos: decímetro e centímetro. A ***Sequência didática: construindo decímetros e centímetros,*** tem por objetivo além da compreensão destas unidades, o entendimento dos números decimais em um contexto de medidas.

Sequência didática: Construindo decímetros e centímetros

TEMA: Medidas de Comprimento

Objetivos

- Ler, interpretar e realizar de forma prática desafios matemáticos envolvendo medidas de comprimento;
- Relacionar as principais frações das principais unidades de medidas a saber: ½, ¼. (½ Metro = 50 cm; ¼ Metro = 25 cm);
- Estabelecer relações e diferenciar unidades de medidas de comprimento: metro, centímetro e decímetro;
- Identificar e utilizar instrumentos de medidas presentes no contexto sociocultural: metro e régua escolar;
- Realizar leituras de medidas em instrumentos convencionais e não convencionais, que expressem o resultado por número decimal e ou frações;
- Resolver situações-problema significativas que requeiram transformações mais importantes e a descoberta de suas relações: comprimento (m/dm; m/cm; dm/cm);
- Compreender e quantificar utilizando números racionais positivo em sua representação decimal.

Material necessário

- Barbante;
- Quadro de giz ou branco;
- Pincel ou giz;

- Vídeo;
- Tiras de papel;
- Jogo: Corrida das réguas;
- Metro;
- Régua escolar.

Aprofundando o Tema

As medidas de comprimento, assim como a medida de tempo aparecem em destaque na história das civilizações antigas. Egito, Mesopotâmia são exemplos de alguns povos que constituíram sistemas de medidas em função da necessidade de plantio e comércio. As medidas antropomórficas, com as partes do corpo, foram as primeiras utilizadas pelo homem. O caminho até a padronização da medida de comprimento foi longo e nesta sequência, buscaremos por meio das atividades propostas, revivermos mesmo que de forma simplista, alguns dos problemas que levaram a humanidade a medir e posteriormente conhecer e utilizar unidades padrões de medidas. Além de objetivar que os alunos compreendam algumas unidades das medidas de comprimento, esta sequência também intentará que as crianças comecem a desenvolver ideias e usos dos números decimais, a partir deste contexto.

Atividade 1: quem é o mais alto da turma?

A professora lançará à turma um desafio, que eles descubram e provem quem é o mais alto da classe. Muitas possibilidades de resolução podem surgir: emparelhamento dos considerados visualmente mais altos, constituição de filas em ordem crescente ou decrescente, entre outros.

Fonte: Portal do professor – MEC

Questione como faremos para medir e descobrir o mais alto e o mais baixo da turma. Estabeleça com os alunos uma forma de comparação das alturas dos alunos – liste no quadro as opiniões/estratégias que podem facilitar tal ação – durante esse momento sugerimos o direcionamento do professor para chegar ao uso do barbante). É importante frisar a medida que estamos utilizando (comprimento). Coloque em ordem crescente o comprimento dos alunos.

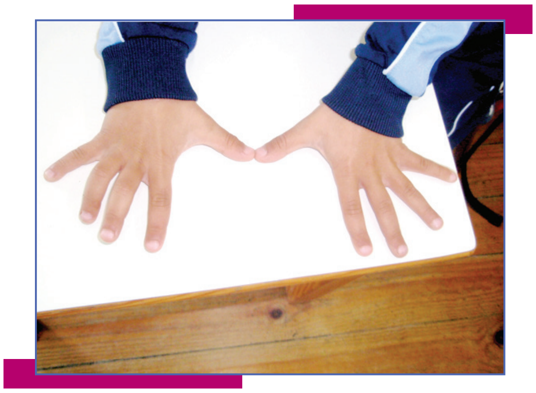
Ao finalizar a atividade, questione com os alunos:

- *O que é comparar?*
- *Quais outras comparações podemos fazer relacionadas a comprimento?*
- *Se, no dia a dia, eles resolvem alguns problemas por meio da comparação. Quais?*

Professor: aproveite para abordar algumas questões relacionadas às diferenças entre as pessoas, de forma que atividades como essa proposta não sejam motivadoras de *bulling*, ações de desrespeito entre as crianças!

Atividade 2: quanto mais alto?

Após acharem quem é o mais alto, fazer a pergunta "quanto mais alto" este é em relação a outros colegas. Listar as possibilidades que os alunos apresentam para a pergunta: medidas não convencionais ou legais. Pedir que cada aluno escolha um jeito de numerar suas alturas para analisarem qual medida resulta. Com a unidade por eles listadas: palmos, centímetros da régua, entre outas possíveis. Anotar no quadro o número a que cada aluno chegou. Perceber que alguns alunos mais baixos ficaram com números maiores ou próximo a outros. Debater até chegar à conclusão de que não poderiam usar unidades diferentes. Escolher uma unidade única para a turma. Perceber que mesmo assim há disparidades. Como, por exemplo, escolher, palmo, mas haverá diferentes tamanhos de palmos.



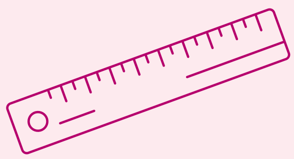
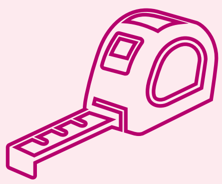
A partir dessa constatação, uniformizar o tamanho de uma unidade na turma.

Atividade 3: quem é o mais alto dos 4º anos e quanto ele mede?

Comparar os alunos mais altos de duas ou mais turmas da escola, a partir da unidade padrão selecionada com cada turma.

Comparar os resultados obtidos entre os alunos de duas turmas (duas unidades diferentes). Discuta a disparidade até chegar à conclusão de que as unidades uniformizadas na turma também não são suficientes para os alunos perceberem a necessidade da unidade legal.

Liste com os alunos quem eles já viram medindo alturas, quais instrumentos utilizavam e quais unidades eles viram. Use tabelas para listar essa pesquisa. Veja modelo abaixo:

Quem mediu?	Qual instrumento utilizado?	O que mediu?	Qual unidade?
		Papel para fazer pipa	Centímetro
		Espaço para colocar um sofá	Metro

Atenção: neste momento o aluno pode não saber a unidade que foi utilizada, portanto peça-lhe para deixar em branco e depois com a continuidade das aulas sobre medida de comprimento retornaremos a esse quadro.

Atividade 4: vídeo sobre a história do metro

Para aprofundar sobre a história da medida de comprimento é importante que agora os alunos sejam orientados a realizarem pesquisas.

Assista ao vídeo: https://youtu.be/vczJlHE4GuY

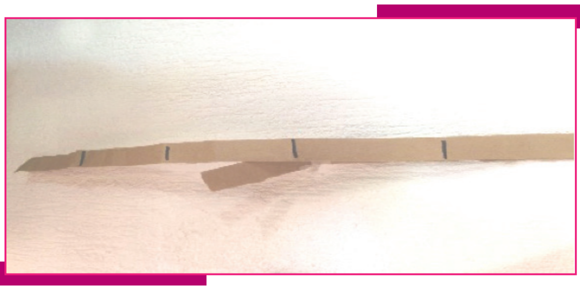
Após assistir ao filme, peça aos alunos para fazerem um paralelo das aulas sobre medida de comprimento e como historicamente a humanidade chegou à padronização das unidades de medida de comprimento. Liste os instrumentos que aparecem no vídeo, correlacionando as profissões nas quais são utilizados. Peça aos alunos que construam com tira de papel o tamanho aproximado que eles acreditam que tem um metro:

- *Compare as estimativas das crianças para esta medida;*
- *Apresente um metro e compare quem conseguiu chegar mais próximo;*
- *Peça que todos os alunos façam um modelo de metro, a partir do levado pela professora e meçam vários comprimentos pela escola;*
- *Leve os alunos a perceberem que para medir alguns espaços menores que o metro, há a necessidade de fracionar a medida.*

Atividade 5: fracionando o metro

Solicite que os alunos meçam coisas menores que um metro, de modo a perceberem a necessidade de fracionar esta unidade.

- *Fracione ao meio o metro e veja se amplia as possibilidades,*
- *Fracionar em 10 pedaços – Construir régua decimetrada: metro divido e marcado em dez partes.*



Solicitar que os alunos façam outras medições agora utilizando o metro e a décima parte do metro:

- Altura da porta e janela da sala
- Comprimento do quadro
- Altura do armário
- Tampo da mesa
- Outros objetos possíveis na sala que os alunos se interessarem em medir

Ao medir usando o metro e sua décima parte, peça aos alunos para registrarem. Neste momento do registro, uma problemática emergirá: como distinguir o número que indica metro do número que indica a décima parte?

Várias formas de registro poderão ser apontadas pelas crianças antes do aparecimento do uso das vírgulas.

Exemplo: 1 metro 6 pedacinhos.

10

Apresente aos alunos a nomenclatura:

DÉCIMA PARTE DO INTEIRO = DÉCIMO

DÉCIMA PARTE DO METRO = DECÍMETRO

10

Atividade 6: Jogo "Corrida das réguas

- **Objetivo de aprendizagem:** Utilizar as medidas de comprimento: metro decímetro e centímetro correlacionando os seus tamanhos;
- **Material: dois dados:** um numérico e um com a indicação de meio metro ou décimo de metro.
- **Número de jogadores:** no mínimo dois grupos.
- **Regras:** a professora estipula o espaço no chão a ser percorrido pelos grupos. Ganha o grupo que chegar primeiro ao ponto final. Cada grupo deverá, na sua vez, lançar os dois dados, um indicará a unidade de medida e a quantidade desta unidade.

Durante o jogo, as problematizações devem ser voltadas para a comparação entre as unidades e se os alunos conseguem distinguir: metro, decímetro e centímetro fazendo relações entre as mesmas.

Atenção: A partir dessa sequência, proponha atividades diversificadas de registro de medidas, problematizando estes registros com números decimais utilizados para outros fins, como, por exemplo, no sistema monetário!!

Sugestões:

Vídeo:

http://www.pluricom.com.br/clientes/grupo-sm/noticias/2009/10/entrevista-carlo-frabetti

http://blogfundamentosdamatematica.blogspot.com.br/2014/09/atividade-individuallivro.html

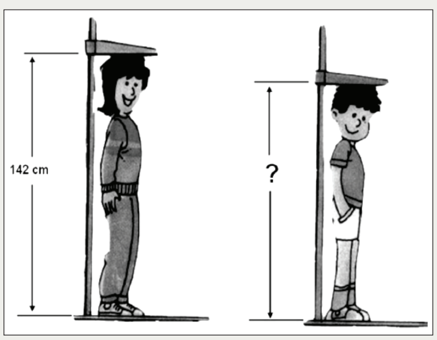
Livros:

Trabalho Interdisciplinar com Medidas

História de civilizações antigas: egípcios, mesopotâmios e gregos

A sequência inicia com uma atividade comum nas salas de aula: a comparação das alturas entre os alunos e desencadeia no necessário uso de números racionais positivos. Após a realização desta sequência didática, das experiências nela vivenciadas e do enriquecimento por meio de outras situações a serem propostas em sala, é esperado que os alunos já consigam resolver questões da Prova Brasil, como a apresentada abaixo, exemplo dos descritores 6 e 7 que dizem respeito à realização de estimativas e uso de unidades convencionais de medida, respectivamente:

Observe as figuras.



Gabriela é mais alta que Júnior. Ela tem 142 centímetros. Quantos centímetros aproximadamente Júnior deve ter?

(A) 50 cm (B) 81 cm **(C) 136 cm** (D) 144 cm

Fonte: Matriz de referência Prova Brasil, MEC (2011)

Nessa questão, espera-se que o aluno, mesmo sem a visualização de um instrumento de medida marcado, consiga fazer uma estimativa por meio de uma referência com base em uma medida convencional, o centímetro. Para desenvolver estes conhecimentos, entender o que os centímetros representam em termos quantitativos em uma reta numerada é muito importante ampliar as possibilidades reflexivas das crianças, sendo necessários estudos anteriores com medidas arbitrárias, realização de estimativas com as mesmas e a construção de medidas inteiras e fracionadas.

Ao conhecer as unidades legais de medidas de comprimento, os alunos podem realizar pesquisas e registrar, em tabelas, a altura, comprimento ou altitudes de espaços urbanísticos ou naturais. Este tipo de pesquisa pode ser fundamentada na curiosidade e na ampliação das formas de registrar dos alunos, como, por exemplo, por meio da habilidade de ler tabelas, apresentada no descritor 27 do campo *Tratamento da Informação*, da Prova Brasil, exposto na questão a seguir:

A tabela abaixo mostra as altitudes de algumas cidades, em relação ao nível do mar. Altitudes acima de 2 600 m provocam dor de cabeça e falta de ar nas pessoas que não estão acostumadas.

Cidade	Altitude
Rio de Janeiro	0 m
São Paulo	750 m
Belo Horizonte	1 150 m
Cidade do México	2 240 m
Quito	2 850 m

Em qual dessas cidades as pessoas poderão sentir dor de cabeça e falta de ar devido à altitude?

(A) Rio de Janeiro.

(B) Cidade do México.

(C) São Paulo.

(D) Quito.

Fonte: Matriz de referência Prova Brasil, MEC (2011)

Perímetro

Uma das definições mais apresentadas aos alunos nos estudos dos blocos *Espaço e Forma* ou *Grandezas e Medidas* é a de perímetro. A frase: denomina-se perímetro a medida do contorno de uma figura, ou seja, no caso de polígonos, a soma das medidas dos comprimentos de seus lados, na maioria das vezes pouco ou nada traz de significativo aos alunos.

Segundo Vergnaud (2009), o estudo de definições, ou a memorização das mesmas, pouco está relacionado à construção conceitual do conhecimento a ser desenvolvido. Para esse autor, o processo de conceitualização vai se dando por meio da construção de esquemas no encontro dos sujeitos com as situações. Dessa forma, se o nosso objetivo é possibilitar que o aluno construa o conceito de perímetro, muitos objetos matemáticos devem ser analisados por meio de estudos tanto no campo da geometria, quanto no das medidas. Observe as fotos abaixo:

Fonte: imagens públicas da internet

De acordo com as imagens, para o desenvolvimento do conceito de perímetros propomos:

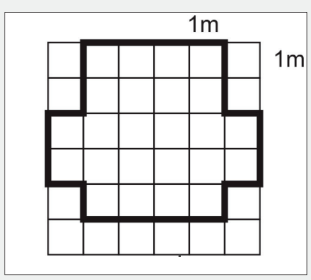
1. *Inicialmente atividades de percepção do contorno de diferentes figuras. Construção de contorno do corpo no chão, passeio pelo contorno de figuras pintadas, ao redor da escola ou da sala de aula, percebendo o formato constituído.*

2. *Situações de estimativa e de conservação de quantidades: comparar o comprimento dos contornos de diferentes figuras com mesmo perímetro ou figuras similares com perímetros diferentes.*

3. *Situações de medição de diferentes contornos com medidas arbitrárias e, posteriormente, convencionais.*

4. *Situações com malhas quadriculadas, pois é um material com muitas possibilidades de construção de figuras planas e comparações e medições de perímetros e áreas. Conforme questão retirada da Matriz de referência da Prova Brasil, sugestão relativa ao descritor 11, em relação a cálculo de perímetro.*

Uma pessoa faz caminhadas em uma pista desenhada em um piso quadriculado, no qual o lado de cada quadrado mede 1m. A figura abaixo representa essa pista.



Quantos metros essa pessoa percorre ao completar uma volta?

(A) 36 m (B) 24 m **(C) 22 m** (D) 20 m

Fonte: Matriz de referência Prova Brasil, MEC (2011)

Nesta questão, como se trata de um contorno poligonal, o seu perímetro pode ser obtido pela soma das medidas dos comprimentos de seus lados. Na visualização da figura, facilitada pela malha, podemos distinguir o contorno (cuja medida é o perímetro) da superfície da figura (cuja medida é a área).

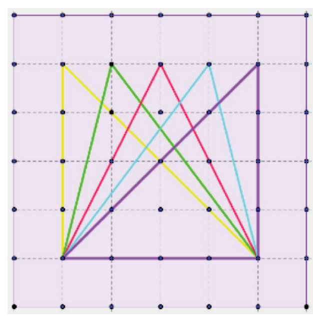
No estudo de perímetro é importante também incluirmos figuras circulares e explorar o contorno das mesmas, principalmente com objetos reais, dos quais os alunos possam pensar e argumentar estratégias de medição deste contorno.

Professor: fique atento à placa como esta:

Não traduzem o conceito matemático de perímetro, pois identificam que estamos adentrando na ÁREA urbana da cidade de Porto Alegre.

Superfície: medindo áreas

Observando os triângulos acima, poderíamos afirmar que todos têm a mesma área?



Fonte: imagens públicas da internet

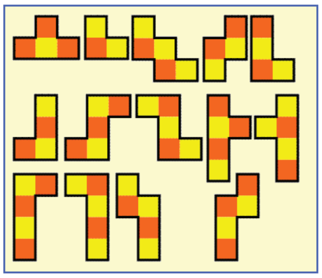
Fazer, em sala de aula, os alunos se aventurarem por situações-problema como essas, é a grande missão quando tratamos do ensino da grandeza superfície, nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Todos os elementos dos estudos de *Grandezas e Medidas*, vistos até aqui, reaparecem: estimativa, experimentação e muitas possibilidades de medidas arbitrárias podem ser pensadas pelas crianças. No entanto, antes de refletirmos como medir superfície, é importante desenvolver aulas voltadas para o entendimento desta grandeza, que tem pontos interessantes a serem mobilizados em sala de aula.

Qual a diferença entre superfície e área?

Tratar de superfície é falar da cobertura de regiões ou composição de figuras planas. E apesar de ser um estudo bastante complexo no campo da matemática, em decorrências das diferentes formas geométricas que podem ter uma medida de superfície. Nos anos iniciais, podemos pensar em superfície a partir da relação de pelo menos duas dimensões: lado X lado, comprimento X largura, altura X comprimento. Nesse sentido, compreender a superfície, apurar o olhar sobre a mesma, não significa exatamente medir superfície, calcular áreas. A área é a medida da superfície, que para ser calculada é necessário que a crianças desenvolvam um senso espacial correlacionado ao numérico, de modo a perceber a composição e medida de diferentes regiões no plano.

Observamos que o ensino de área, mesmo para os alunos do segundo ciclo, tem-se evidenciado pela ênfase exagerada nas fórmulas, nas unidades e conversões. Tais estratégias podem levar os alunos a uma confusão comum entre medida de área e medida do perímetro. As fórmulas contribuem para o desenvolvimento da matemática enquanto ciência, mas os alunos devem utilizá-las somente com compreensão.

Dessa forma, uma boa metodologia de ensino, com destaque na percepção da superfície e no cálculo de área, é a composição e decomposição de figuras. Podemos achar online vários desafios interessantes para as crianças, como, por exemplo, este abaixo, no qual o aluno deve achar qual a peça completa o tabuleiro.



Este jogo disponível em: <http://ghiorzi.org/quebra.htm>, leva ao aluno a refletir sobre a organização geométrica da figura e suas características de composição.

Outros jogos interessantes, online são os jogos no estilo *Tetris*[9] e quebra-cabeças, com os quais é possível desenvolver a ideia de superfície e sua medida (área) a partir da ideia de revestir, compor espaços e figuras. Para que o aluno construa tais noções, não basta jogar, é necessário a atuação problematizadora do professor questionando as relações entre uma figura composta e decomposta. Tais jogos podem também ser construídos pelas crianças em versão física.

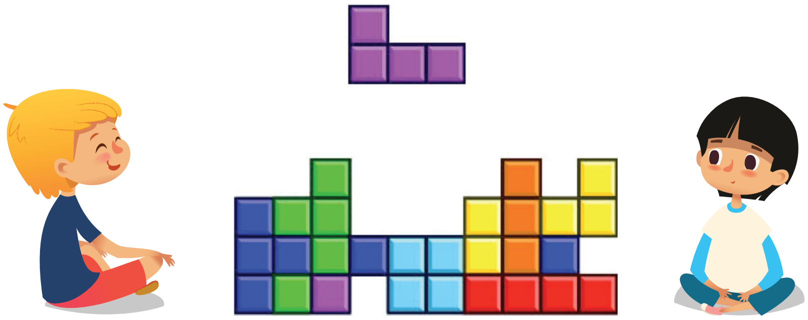


Imagem ilustrativa do jogo *Tetris* – Fonte: imagem pública da internet

Outras atividades interessantes são as realizadas com malhas quadriculadas e o destaque de figuras nestas malhas, que auxiliam os alunos a perceberem situações importantes com relação à grandeza superfície, antes do cálculo propriamente de áreas com as unidades usuais. É interessante que se desenvolvam atividades de manipulação, construção e observação de figuras que apresentem relações como, por exemplo:

a) Figuras similares com áreas diferentes;

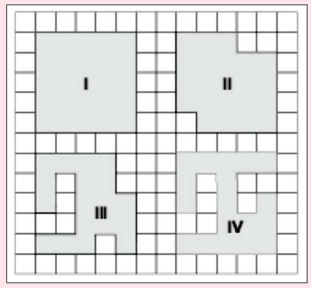
9 Tetris é um jogo digital, desenvolvido por Alexey Pajitnov, Dmitry Pavlovsky e Vadim Gerasimov, no Centro de Computação da Academia Russa de Ciências (Russian Academy of Sciences), em Junho de 1984. (Fonte: <http://www.techtudo.com.br/noticias/noticia/2011/08/historia-do-tetris.html>).

b) Figuras diferentes com mesma área;

c) Figuras com a mesma área, mas perímetro diferentes;

d) Figuras com diferentes áreas e mesmo perímetro.

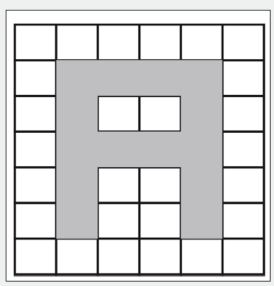
Professor: observe as figuras ao lado e tente fazer algumas problematizações para os alunos, pensando nas relações entre área e perímetro, como propostas no texto:



Fonte: imagens públicas da internet

Como já foi destacado anteriormente, para expressar uma medida não é suficiente o número, mas o mesmo deve ser acompanhado de uma unidade. Nas atividades com as malhas quadriculadas, os alunos são estimulados a pensar na medida da área por meio da contagem dos quadradinhos que recobrem as figuras. O descritor 12, da Prova Brasil, busca compreender se eles têm a habilidade de resolver problemas envolvendo o cálculo ou a estimativa de áreas de figuras planas, desenhadas nestas malhas, como no exemplo abaixo possa ser resolvida.

Em sua fachada, uma loja cobriu com azulejos a inicial do nome do dono. Cada quadrinho corresponde a um azulejo.



Quantos azulejos foram usados para colorir a letra "A" desse desenho?

(A) 13 **(B) 14** (C) 16 (D) 20

Fonte: Matriz de referência Prova Brasil, MEC (2011)

Após o trabalho com as malhas, comparações e medidas de áreas com os quadradinhos, é interessante a construção da medida usual, o metro quadrado. Como as crianças já conhecem o metro, construído e pesquisado pelos alunos nas aulas com medida de comprimento, a construção desta unidade em tamanho real é imprescindível, principalmente para eliminar questionamentos relacionados a estas duas medidas.

Para a tarefa de construir o metro quadrado em tamanho real, podemos usar jornal, cartolina, papel pardo, entre outros tipos de folhas grandes disponíveis na escola. Ao medir espaços como: a sala, a quadra, os corredores da escola a partir desta unidade, os questionamentos do professor estimulam os alunos a refletirem sobre as relações entre as dimensões envolvidas na medida de área, nas relações de proporcionalidade e na ideia de configuração retangular presente nesta medição.

Segundo as orientações dos PCN, somente nos anos finais do Ensino Fundamental, a preocupação com a medida de superfície deve recair sobre a construção das fórmulas de áreas. Mas, os docentes dos anos iniciais não devem omitir ou evitar possíveis inferências construídas pelos alunos do segundo ciclo, afinal, as percepções e possibilidades de resolução dos alunos frente às problematizações apresentadas, muitas vezes alçam voos e nos surpreendem.

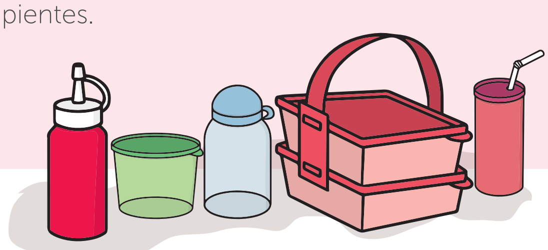
Capacidade e volume: relações e interseções

Com o objetivo de analisar o nível de compreensão e o grau de aquisição de algumas noções-chave do desenvolvimento cognitivo, Piaget desenvolveu testes conhecidos como *Provas Piagetianas*. A partir de uma série de atividades e conforme as respostas apresentadas pelas crianças, para o pesquisador era possível analisar o nível de desenvolvimento que as mesmas se encontram com relação à construção lógica do pensamento operatório.

Dentre as *Provas Piagetina*s, uma das atividades mais conhecidas é a que trata da observação da capacidade da criança em conservar quantidades. Já nos referimos à questão da conservação ao tratarmos das medidas de comprimento e superfície, mas tal conceito é fundante no entendimento das grandezas de massa e capacidade, pois são essenciais para a percepção e comparação das mesmas em diferentes contextos.

As atividades propostas por Piaget são base para tarefas interventivas e de desenvolvimento de conhecimentos em relação à percepção de capacidade de líquidos em recipientes: transvasar de líquidos – compreendendo que diferentes recipientes podem ter a mesma capacidade ou recipientes parecidos têm capacidades diferentes; medir com copos de diferentes tamanhos e graduar recipientes são atividades que devem ser vivenciadas para a compreensão da grandeza capacidade, desde a Educação Infantil. Contudo, elas podem ser ainda utilizadas para as crianças dos 4º e 5º anos, permitindo ao professor perceber o que as crianças já construíram conceitualmente sobre este conteúdo.

Professor: apresente para seus alunos diferentes recipientes, faça comparação, proponha atividades de seriação e classificação, por meio de observação e também experimentação em torno da capacidade destes recipientes.



Após essas atividades iniciais, as embalagens e rótulos dos recipientes podem ser utilizados para os alunos descobrirem as unidades padronizadas associadas à medida de capacidade.

Em qual recipiente cabe mais do que um litro? O litro e seu submúltiplo mililitro são as unidades mais comuns utilizadas socialmente e podem ser comparadas a partir das embalagens estudadas. Antes de pensar sobre o mililitro, é interessante a percepção e estimativas em torno do litro. Atividades como a apresentada abaixo podem ser vividas na prática em sala de aula.

Todos os objetos estão cheios de água.
Qual deles pode conter exatamente 1 litro de água?

(A) A caneca **(B) A jarra** (C) O garrafão (D) O tambor

Fonte: Revista Nova Escola – Editora: Abril

Qual a diferença entre volume e capacidade?

Essa é uma pergunta chave para iniciar os estudos sobre qualquer uma dessas duas grandezas. Por isso, é importante aprofundarmos um pouco sobre características de cada uma delas:

Medida de Capacidade

- Varia de acordo com o recipiente e a unidade de medida escolhida;
- Associada a transvasamento de líquidos;
- Unidade de medida padrão: litro;
- O litro, apesar de ser considerada uma unidade padrão, por razões culturais é uma unidade fora do Sistema Internacional de Unidades;
- 1 L = 1 dm^3.

Medida de Volume

- Grandeza geométrica;
- Quantidade de espaço que um corpo ocupa;
- Associada comumente a três medidas: comprimento, largura, altura;
- Pode coincidir com a medida de capacidade quando medimos o volume interno de um recipiente;
- Unidade de medida legal: metro cúbico (m^3).

Suponha que estes dois cubos, de vidro (vazado) e de madeira (corpo sólido), tenham as mesmas dimensões. O que podemos falar sobre a capacidade e o volume de ambos?

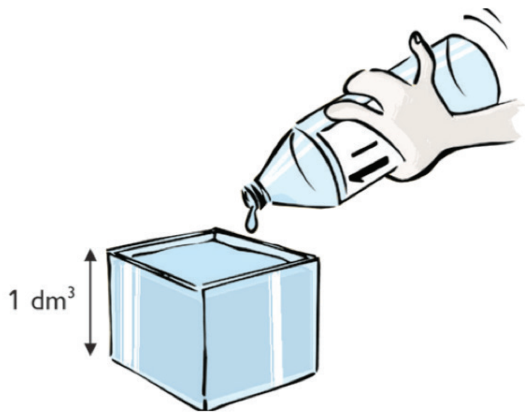
Fonte: imagens públicas da internet

O primeiro cubo pode ser preenchido em sua parte interna podendo transvazar líquidos. Dessa forma, dizemos que neste cubo podemos medir a capacidade interna, e ainda, essa capacidade interna corresponde ao volume interno deste recipiente. No primeiro cubo poderíamos, portanto, medir capacidade e volume.

O segundo cubo, por ser sólido, não tem espaço interno, não tem capacidade, no entanto é um corpo tridimensional, que ocupa lugar no espaço. Dessa forma, podemos medir as dimensões: altura, largura e comprimento- um caminho para o cálculo do volume deste objeto. Neste cubo, então, há volume, mas não é observada uma medida de capacidade relevante.

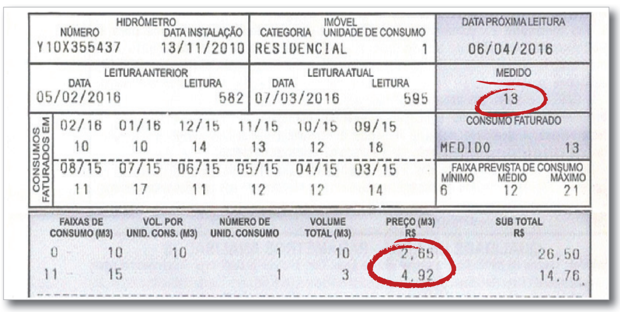
As unidades de medidas de capacidade e volume, podem ser relacionadas no primeiro cubo. A unidade padronizada utilizada pela medida de capacidade é o litro que ocupa internamente o volume correspondente a um decímetro cúbico. Para associar estas duas medidas, é interessante que o professor construa com os alunos um cubo com a medida de um decímetro cúbico e o preencha com um litro.

Para construir um cudo com um decímetro cúbico de volume, a altura, largura e comprimento deste cubo deve ser igual a 1 decímetro, ou seja, 10 centímetros. É interessante utilizar um material que possa suportar o transvasamento de líquidos.



Fonte: imagens públicas da internet

Após a descoberta das relações entre medida de capacidade e volume, um gênero textual importante, que pode ser utilizado para reflexões em torno das possíveis comparações, é a conta de água.



HIDRÔMETRO NÚMERO	DATA INSTALAÇÃO	IMÓVEL CATEGORIA	UNIDADE DE CONSUMO	DATA PRÓXIMA LEITURA
Y10X355437	13/11/2010	RESIDENCIAL	1	06/04/2016

LEITURA ANTERIOR DATA	LEITURA	LEITURA ATUAL DATA	LEITURA	MEDIDO
05/02/2016	582	07/03/2016	595	13

CONSUMOS FATURADOS EM					
02/16	01/16	12/15	11/15	10/15	09/15
10	10	14	13	12	18
08/15	07/15	06/15	05/15	04/15	03/15
11	17	11	12	12	14

CONSUMO FATURADO	
MEDIDO	13

FAIXA PREVISTA DE CONSUMO MÍNIMO	MÉDIO	MÁXIMO
6	12	21

FAIXAS DE CONSUMO (M3)	VOL. POR UNID. CONS. (M3)	NÚMERO DE UNID. CONSUMO	VOLUME TOTAL (M3)	PREÇO (M3) R$	SUB TOTAL R$
0 - 10	10	1	10	2,65	26,50
11 - 15		1	3	4,92	14,76

Fonte: imagens públicas da internet

O consumo de água é medido com metro cúbico (m³).

Preço do m³. Relações entre consumo e os valores cobrados.

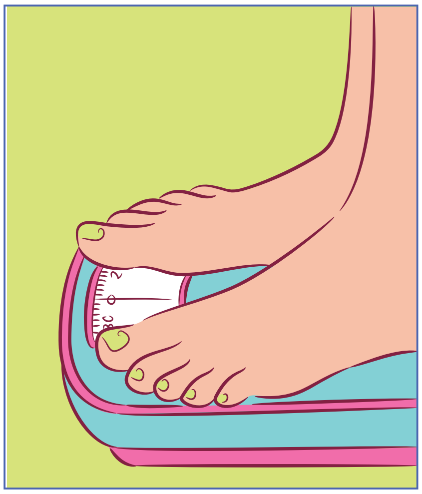
Para interpretar este gênero textual, questões como as abaixo são interessantes.

- *Qual companhia que mede a quantidade consumida e por que medimos este consumo?*
- *O que é um hidrômetro e como este instrumento funciona?*
- *Quais quantidades de água em m³ foram apontadas no hidrômetro na leitura anterior e na atual?*

- *Qual o consumo médio anual?*
- *Qual o consumo apontado no hidrômetro na leitura em m³, dm³ e L?*

Além, de todas estas situações relativas à medida de capacidade e volume, este gênero pode ter várias outras explorações: sistema monetário, data de vencimento, entre outros elementos.

Medida de Massa – peso ou massa?



Ao subirmos na balança é comum ouvirmos a expressão: “Estou acima do peso!” Mas o que estamos medindo ao subir na balança?

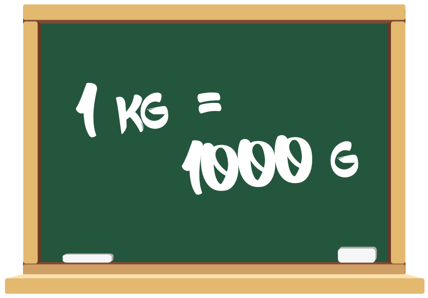
De acordo com a física o peso é uma grandeza que varia de acordo com a gravidade. Assim, o peso de uma pessoa nos planetas Terra e Marte não seria o mesmo, uma vez que as gravidades destes dois planetas não são iguais. Já a massa é a quantidade de matéria presente no corpo, que não varia com o deslocamento no espaço. Ao subirmos na balança estamos, portanto, medindo a massa do corpo.

A unidade legal para medida de massa é o quilograma (kg). De acordo com o Currículo em Movimento, os alunos do segundo ciclo devem realizar atividades das quais consigam resolver situações-problema que envolvam as transformações entre as unidades de medidas de massa mais usuais: kg (quilograma), g (grama), mg (miligrama) e t (tonelada). Para que tais transformações sejam compreendidas pelos alunos, sem uso de esquemas baseados apenas em tabelas a serem memorizadas, é importante que eles percebam quando é mais adequado utilizar um tipo de unidade e ainda que sejam estabelecidas as relações do SLM com o Sistema de Numeração Decimal.

Perceber a unidade de medida mais adequada para ser utilizada em determinadas situações, não é uma tarefa fácil, requer que as crianças já tenham feito atividades de estimativa, analisado a massa de produtos diversos com unidades não convencionais. Após estas atividades já debatidas anteriormente neste texto, o estudo de embalagens e o manuseio de diferentes produtos que são comprados a partir da medida de massa é uma estratégia interessante para ampliar a compreensação em relação a esta grandeza e estratégias de medi-la.

As embalagens, da maioria dos produtos alimentícios por nós consumidos, apresentam a massa do produto em quilogramas ou gramas. Ao analisar as embalagens, manusear os produtos, comparar e estimar massas os alunos percebem que para coisas mais pesadas utilizamos o quilograma e para produtos em menor quantidade, com massa menores do que um quilograma utilizamos o grama.

Ao perceber a unidade mais conveniente para cada produto, o professor pode explorar a relação das duas unidades:

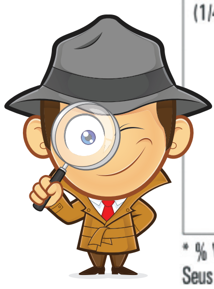


Muitas questões em relação ao Sistema de Numeração Decimal, seja no conjunto dos números naturais ou na representação decimal dos números racionais positivos, podem ser feitas:

- *Quantos gramas tem meio quilograma?*
- *1,5 kg equivale a quantos gramas?*

São alguns exemplos de questões que farão os alunos pensarem sobre as medidas e sobre números, avançando nos conjuntos para além dos números naturais.

Um texto interessante para avançar nas relações entre as principais unidades utilizadas para *Medida de Massa* são as *Informações Nutricionais* presentes nas embalagens dos produtos alimentícios industrializados. Nesse texto, podemos perceber que alguns componentes têm sua massa expressa por gramas e outros por miligramas.

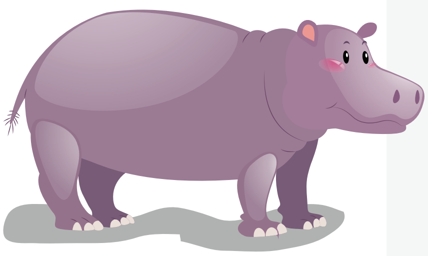


Informações Nutricionais	Quantidade/porção		% VD(*)	Quantidade/porção		% VD(*)
Porção de 50g de Arroz (1/4 xícara)	Valor energético 357kcal ou 1498kj		18%	Ferro	0,77mg	6%
	Carboidratos	73g	24%	Potássio	140mg	-
	Proteínas	9,3g	12%	Cobre	0,46mg	51%
	Gorduras totais	3,1g	6%	Zinco	1,8mg	26%
	Gorduras saturadas	0,8g	4%	Magnésio	63mg	24%
	Gorduras trans	0g	**	Ômega 3	0,011mg	-
	Fibra alimentar	1,4g	6%	Fósforo	466,11mg	-
	Sódio	0mg	0%	Colesterol	0mg	-
	Umidade	12,17%	-	Vitamina B1	0,22mg	18%
	Cinzas	1,19%	-	Vitamina B2	0,10mg	8%
	Cálcio	4,9mg	0%	Vitamina B3	0,94mg	6%

* % Valores diários de referência, com base em uma dieta de 2.000Kcal ou 8.400kJ.
Seus valores diários podem ser maiores ou menores, dependendo de suas necessidades energéticas. ** % VD não estabelecido.

Professor: peça para seus alunos pesquisarem e levarem embalagens para a sala. Proponha uma leitura matemática e também relacionada à alimentação saudável, a partir da quantidade de cada porção dos componentes!

Outro gênero textual interessante que pode possibilitar discussões sobre outra unidade de medida é a ficha técnica com a descrição de animais. Os alunos podem perceber que animais de grande porte não têm suas massas expressas por quilogramas, mas sim por toneladas.



Hipopótamo

Origem: África

Habitat: Vivem próximos de rios

Alimentação: São herbívoros e se alimentam de vegetação às margens de rios.

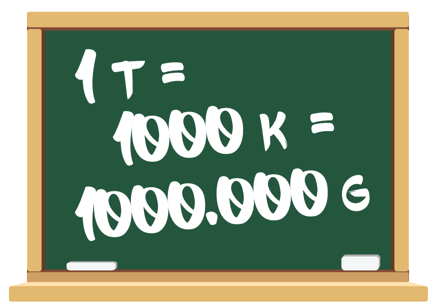
Peso: 3,5 toneladas

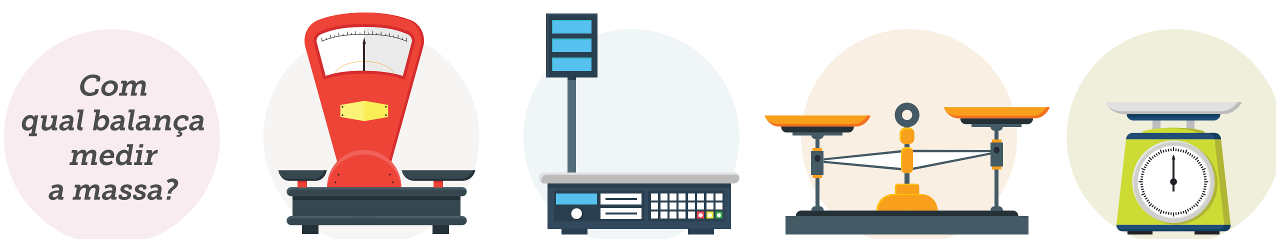
Curiosidades:

- Os hipopótamos têm uma mordida muito forte, o dobro de uma mordida de leão;
- Também possuem uma pele sensível às queimaduras solares e para se proteger eles soltam um líquido que confunde com sangue.

A tonelada, assim como o litro, é uma unidade fora do Sistema Internacional, mas culturalmente muito utilizada para medir grandes massas.

No texto ficha técnica, nas atividades em sala, o professor pode explorar, além da medida de massa, medida de comprimento e de tempo, questões relacionadas ao ensino de ciências e geografia.





Nas primeiras atividades relacionadas à medida de massa, das quais os alunos são instigados a medir, a sugestão é a construção de balanças manuais que, apesar da baixa precisão, são úteis para atividades de comparação e estimativa. Nas atividades posteriores, vários tipos de balanças podem surgir, algumas do grupo das analógicas e outras no grupo das digitais.

As balanças analógicas funcionam por componentes de ligação mecânicos que puxam os ponteiros de acordo com a massa do produto colocado. Já as balanças digitais, funcionam por meio de sensores de precisão, por isso são mais eficientes para medir produtos com massa corpórea em pouca quantidade.

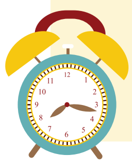
A balança é um dos instrumentos de medidas que podem ser encontrados em vários modelos. Podemos citar, a balanças de pesos com dois pratos com as medidas padrões em peças maciças para realizar as comparações, balanças portáteis de precisão, balança analógica de cozinha, balança mecânica ou industrial para medir a massa de cargas grandes e ainda balança analítica utilizada em laboratórios.

Conhecer as diferentes balanças, fazer medidas em pelo menos dois modelos diferentes traz à sala de aula um debate importante quando nos referimos à medida, à questão da precisão, pois todos os passos que a humanidade teve em relação a estes estudos surgiram da necessidade de obter medidas mais exatas grandezas variadas.

Tempo, tempo, tempo...

Sobre o tempo
Pato Fu

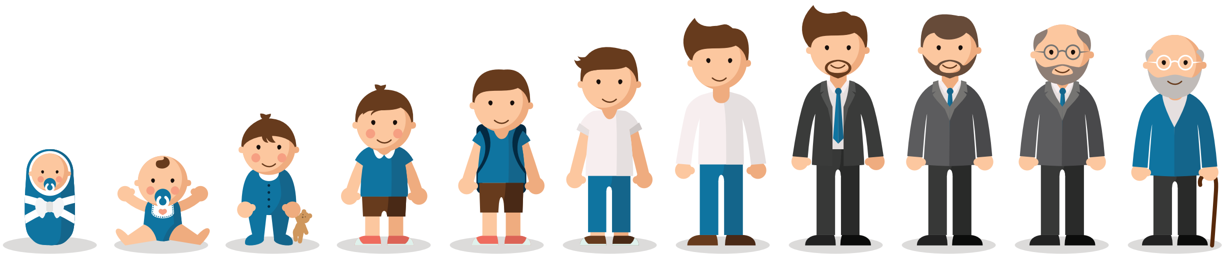
Tempo, tempo mano velho, falta um tanto ainda eu sei
Pra você correr macio
Tempo amigo seja legal
Conto contigo pela madrugada
Só me derrube no final



Os trechos da música: “Sobre o tempo”, da banda mineira Pato Fu, traduzem um pouco a nossa relação com esta grandeza, pois diferentemente das grandezas já estudadas, o tempo está relacionado a um fenômeno. Se, ao lidarmos com outras grandezas, a percepção e a sensibilidade foram elementos essenciais, ao falarmos de tempo estas ações são ainda mais potencializadas.

No debate sobre a percepção do tempo é muito comum, achar o tempo nosso amigo quando desfrutamos de momentos de lazer e ter uma visão negativa quando temos que realizar tarefas que não nos agradam.

Estas relações subjetivas sobre o tempo e a passagem dele não podem ser desconsideradas nos estudos desta grandeza, pois nos mobilizam a pensar no conceito de tempo de uma forma mais personalística e a compreender este fenômeno como intrínseco e natural ao desenvolvimento do homem, como no ciclo da vida, do nascimento à morte.



Os estudos desta grandeza, portanto, não podem iniciar com a apresentação de um relógio e o funcionamento de seus ponteiros como estamos acostumados a vivenciar na escola. Olhar para o ser humano e ver como a passagem do tempo nos afeta, pode ser um ponto de partida.

Para começar a medir o tempo, uma visão das unidades maiores para as menores também é um meio de fazer o aluno olhar para intervalos de tempos mais amplos.

A unidade de medida legal para o tempo é o segundo, mas escolhemos as unidades de medidas mais apropriadas para medir os intervalos de tempo, pelo quantidade de tempo a ser medida. Tomar um período como longo ou curto vai variar de acordo com a referência utilizada.

A data de nascimento é um marco na vida do ser humano e foi medida pelas unidades de tempo. Esta data possibilita muitas situações na sala de aula e deve ser utilizada como uma atividade central, junto com o estudo de calendários, produção de linhas de tempo, utilização de agendas, entre outros registros e marcadores de ações em vários períodos.

É interessante que todas as salas tenham um calendário anual, pois ao marcar datas importantes para a turma, as crianças terão condições de vizualizar e interpretar a partir de um todo (ano) e não de fragmentos (meses) que acabam em muitos casos no entendimento dos alunos como períodos isolados.

Destacar no calendário anual um mês para realizar várias situações-problema, como localizar dias ou semanas, é um modo de aproximação das unidades relacionado a intervalos de tempo menores.

Podemos construir também, para medida de tempo, instrumentos e unidades não padronizadas. O relógio solar, a ampulheta caseira, a vela, ou mesmo, a contagem até certa quantidade determinada são unidades utilizadas e que podem ser exploradas em sala de aula.

As relações entre semana, dia, hora, minuto e segundo são estudas pelas turmas de quarto e quintos anos. O descritor 8 da Prova Brasil destaca que os alunos do quinto ano devem desenvolver a habilidade de estabelecer relações entre as unidades de medida de tempo.

A avó de Patrícia mora muito longe. Para ir visitá-la a menina gastou 36 horas de viagem. Quantos dias durou a viagem de Patrícia?

(A) 1 dia

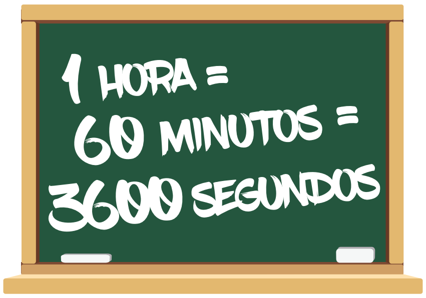
(B) 1 dia e meio

(C) 3 dias

(D) 36 dias

Fonte: Matriz de referência Prova Brasil, MEC (2011)

É importante destacar que estas unidades não estão associadas à base dez, como no SND, mas há uma variação, em relação a hora, minuto e segundo cuja a base é 60.



Ao fazermos relações com as unidades culturais de tempo, percebe-se que muitos países usam notações fracionadas para se referir às horas. Em alguns países, principalmente de origem saxônica, as referências das frações de quartos norteiam algumas leituras, como, por exemplo, a hora marcada no relógio abaixo, no Brasil lemos quatro e quinze (4:15), mas em outras culturas poderia ser lido: um quarto passado de quatro.

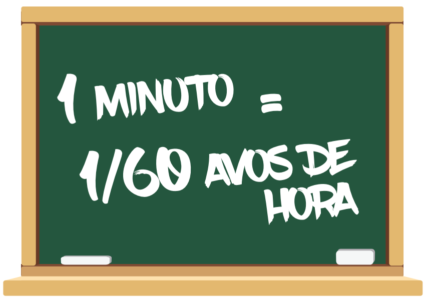
Esta leitura decorre da percepção do relógio divido em quartos.

1/4 de 60 = 15

1/4 de 60 = 30

1/4 de 60 = 45

A base sessenta também pode ser explorada a partir de números fracionários.



Desafio para o professor: se um minuto é igual a 1/60 avos de hora, quanto vale 24 minutos? E 84 minutos?

Professor:reflita algumas relações que podem ser feitas em relação a medidas de tempo e números fracionários, pois pode ser um contexto interessante para descobrir mais sobre esses números e ainda explorar o relógio e a contagem do tempo.

Para intervalos de tempo menores que um segundo, a base utilizada não é mais sexagesimal e sim, a decimal, com décimos e centésimos desta unidade. Vejamos uma pesquisa em relação aos tempos dos atletas em corridas de 100 metros rasos em campeonatos mundiais:

Tabela: Relação dos velocistas vencedores da prova dos 100m rasos nas doze edições do Campeonato Mundial de Atletismo

Edições	Atleta	País	Marca
1ª - 1983	Carl Lewis	Estados Unidos	10"07
2ª - 1987	Carl Lewis	Estados Unidos	9"93(WR)
3ª - 1991	Carl Lewis	Estados Unidos	9"86 (WR)
4ª - 1993	Linford Christie	Reino Unido	9"87 (AR)
5ª - 1995	Donovan Bailey	Canadá	9"97
6ª - 1997	Maurice Greene	Estados Unidos	9"86 (CR)
7ª - 1999	Maurice Greene	Estados Unidos	9"80 (CR)
8ª - 2001	Maurice Greene	Estados Unidos	9"82
9ª - 2003	Kim Collins	São Cristóvão e Nevis	10"07
10ª - 2005	Justin Gatlin	Estados Unidos	9"88
11ª - 2007	Tyson Gay	Estados Unidos	9"85
12ª - 2009	Usain Bolt	Jamaica	9"58 (WR)

Legenda: WR: Recorde Mundial. AR: Recorde Continental
CR: Recorde dos Campeonatos
Fonte:http://www.efdeportes.com/efd143/100-metros-rasos-campeonato-mundial-de-atletismo.htm

A marca conquistada por Usain Bolt, em 2009, bateu o recorde mundial da época e foi registrado como: 9”58, que por extenso, pode-se ler: nove segundos e cinquenta e oito centésimos. Na passagem do segundo para o décimo, centésimo, milésimo de segundo a base de relação das unidades deixa de ser sessenta e passa a ser dez. Dessa forma, foram decorridos cem centésimos de segundo para cada segundo contado.

A vivência com situações-problema que desafiem os alunos a lidar com horas, minutos e segundos e estudo de relógios analógicos e digitais, calculando intervalos,vão preparar os alunos para situações como a apresentada abaixo, que enfatiza o descritor 9 da Prova Brasil: estabelecer relações entre o horário de início e término e/ou o intervalo da duração de um evento ou acontecimento.

Um programa de música sertaneja, pelo rádio, começa às 6h55min e o programa seguinte começa às 7h30min.

Quantos minutos dura o programa de música sertaneja?

(A) 25

(B) 35

(C) 55

(D) 85

Fonte: Matriz de referência Prova Brasil, MEC (2011)

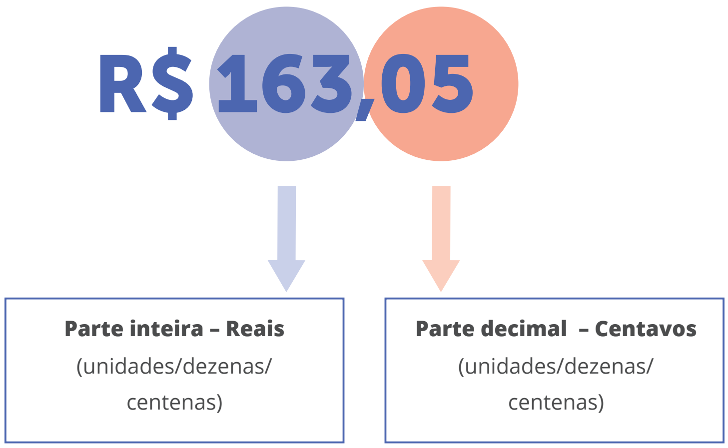
Sistema monetário

Na **Sequência didática: construindo decímetros e centímetros**, houve a introdução de registros com números decimais. A partir da compreensão destes números, os alunos tiveram condição de utilizá-los em diferentes situações, inclusive no registro de outras medidas. No entanto, ao tratarmos de Sistema Monetário, é inevitável ampliar esta compreensão.

O manuseio de notas, moedas, que representem o nosso sistema monetário, deve ser o ponto de partida. Acreditamos que as crianças, alunas dos 4º e 5º anos, já vivenciaram diferentes situações de uso real de valores monetários. No entanto, cabe ao professor sistematizar a compreensão desta grandeza, principalmente, salientando as diferentes formas de registro.

Registro material	Registro por extenso	Registro numérico
	CENTO E SESSENTA E TRÊS REAIS E CINCO CENTAVOS	R$ 163, 05

Na notação numérica de valores, as correlações com o Sistema de Numeração decimal devem ser enfocadas na sala de aula. A função da vírgula, nestes registros, facilmente, é percebida pelas crianças.



Com referência ao registro numérico dos valores monetários, o professor conta com uma série de gêneros textuais cujo o objetivo é a divulgação de valores. Estes textos em circulação, antes de serem fragmentados para fins de situações-problema matemáticos, devem ser explorados pelo professor, quanto à finalidade, estrutura de organização e circuito discursivo que cumprem, enquanto veículo de comunicação.

Panfletos de supermercado, de lojas de materiais de construção, menus de restaurantes, tabelas de preços de eventos são alguns gêneros textuais que têm como finalidade central a publicização de valores, que podem ser utilizados em sala de aula.

Fonte: imagens públicas da internet

A partir desses textos, que se desdobram em problematizações cotidianas, os alunos poderão resolver, entre outras operações, situações-problema de adição e subtração com números decimais, compreendendo a constituição do número em sua parte inteira e decimal. Conforme proposto no descritor 25 da Prova Brasil, exemplificado a seguir:

Beto quer comprar uma camiseta que custa R$ 16,99. Ele já tem R$ 14,20. Para Beto poder comprar a camiseta ainda faltam:

(A) R$ 2,79

(B) R$ 15,57

(C) R$ 18,41

(D) R$ 31,19

Fonte: Matriz de referência Prova Brasil, MEC (2011)

Alguns jogos do universo infantil, para faixas etárias variando de acordo com os alunos do segundo ciclo, são situações didáticas (vide quadro) que podem potencializar as aprendizagens das crianças por meio de atividades lúdicas, as quais, embora não tenham sido organizadas para fins de aprendizagem matemática, requerem conceitos nessa área do conhecimento, para serem jogados.


Fonte: imagens públicas da internet

Outras atividades já conhecidas dos professores, como mercadinho, simulação de banco, cofrinho da turma, também permitem aos alunos compor e decompor números decimais relacionados a valores monetários. A partir deste conjunto de propostas em torno do Sistema Monetário Brasileiro, e suas notas e moedas, espera-se que os alunos compreendam e resolvam situações associadas ao descritor 10 da Prova Brasil, que intenta avaliar a habilidade das crianças em estabelecer trocas entre cédulas e moedas em função de seus valores, como apresentado no exemplo a seguir:

Renê entrou em uma livraria e comprou um livro por R$ 35,00 e uma caneta por R$ 3,00.

Quais a cédulas que Renê poderá usar para pagar sua conta?

(A) 1 cédula de 10 reais, 5 cédulas de 5 reais e 3 cédulas de 1 real.

(B) 1 cédula de 10 reais, 4 cédulas de 5 reais e 3 cédulas de 1 real.

(C) 2 cédulas de 10 reais, 1 cédula de 5 reais e 3 cédulas de 1 real.

(D) 2 cédulas de 10 reais, 2 cédulas de 5 reais e 2 cédulas de 1 real.

Fonte: Matriz de referência Prova Brasil, MEC (2011)

Nas atividades propostas para o trabalho com o sistema monetário, a resolução de situações-problema, como desafios envolvendo os números decimais, manuseio e registro de valores devem desenvolver nos alunos a capacidade de lidar com situações cotidianas que envolvam o sistema monetário.

Analisar as questões sociais em relação ao custo benefício, valores e impostos cobrados, também faz parte dos objetivos de ensino, ao tratarmos de dinheiro na escola. Tais questões, presentes no bloco *Grandezas e Medidas*, também são abordadas em *Tratamento da Informação* e devem ser exploradas pelos professores.

Observe a tabela:

SEM IMPOSTO				
Descrição	Preço normal (R$)	Impostos (%)	Imposto (R$)	Sem imposto (R$)
Fogão 5 bocas	1.300,00	41,22	535,86	764,14
Armário	1.050,00	18,02	189,21	860,79
Jogo de panelas (5 peças)	180,00	35,77	64,39	115,61
Torradeira	130,00	48,21	62,67	67,33
Cafeteira	115,00	44,63	51,32	63,68
Micro-ondas (inox, 31 litros)	896,00	59,37	531,95	364,04
Batedeira	200,00	44,37	88,74	111,26
Geladeira (02 portas, 310 litros)	1.600,00	38,21	611,36	988,64
Mesa 6 lugares	850,00	18,00	153,00	697,00
Conjunto de pratos (6 peças)	100,00	34,30	34,30	65,70
Jogo de talheres (24 peças)	350,00	34,30	120,05	229,95
Arranjo de flores	90,00	40,62	36,59	53,44
Forno elétrico	379,00	59,37	225,01	153,99
Conjunto de xícaras (6 peças)	85,00	44,52	37,84	47,16
Total	7.325,00		2.742,29	4.582,73

Fonte: site de notícias e economia (domtotal.com).

A partir da leitura da tabela de preços e impostos, podemos fazer uma análise crítica com os alunos e perceber se eles estão desenvolvendo a habilidade de ler informações presentes em gráficos e tabelas, como aponta o descritor 27, da Prova Brasil. Questões podem ser pesquisadas e analisadas:

- *Quais impostos sobre mercadoria são cobrados no Brasil?*
- *Há diferenças de impostos para diferentes tipos de produtos?*
- *Qual produto na tabela teve um menor imposto cobrado?*
- *Qual produto na sua opinião valeria a pena ser comprado e por quê?*

Debates e estudos como esses podem ampliar a visão crítica dos alunos e percepção da matemática como ferramenta para a leitura do meio social.

Avaliação nas aulas de matemática

Na rede pública de ensino do Distrito Federal, dois documentos têm-se apresentado como orientadores das perspectivas de avaliação escolar: Currículo em Movimento (2014) e Diretrizes de Avalição Educacional (2014). Ambos apresentam a avaliação formativa, como indutora do processo de ensino-aprendizagem.

A função formativa da avaliação objetiva o desenvolvimento e a aprendizagem de cada aluno. Dessa forma, o ato de avaliar em sala de aula não pode se restringir ao aluno, mas também ao ambiente de ensino que o mesmo tem vivenciado: escolhas didáticas e pedagógicas dos professores, organização do trabalho pedagógico, condições físicas das escolas e postura estabelecida na relação do grupo de docentes com o aluno, são alguns exemplos de fatores que também devem ser analisados, pois influenciam diretamente no sucesso escolar das crianças.

Em Educação Matemática, a análise de erros (CURRY, 2013) e a análise de protocolos de resolução (MUNIZ, 2009) têm-se apresentado como alternativas para a implementação da avaliação com o foco na aprendizagem, buscando entender como os alunos constroem o pensamento resolutivo, como organizam seus esquemas (VERGNAUD, 2014), suas representações e algoritmos. Tais ações são centrais, pois tencionam conhecer as dificuldades e as potencialidades nas produções das crianças, além de serem pontos de partida para a reorganização das ações pedagógicas diante das informações coletadas.

Nesta perspectiva, compreender os motivos para a ocorrência dos erros nas produções dos alunos (SANTOS E BURIASCO, 2008) é um indicador de uma ação formativa nas aulas de matemática, assim como o *feedback* e a autoavaliação. Os alunos precisam também perceber, com ajuda do professor, o conhecimento em relação aos seus erros e à origem das suas dificuldades, para construírem processos regulatórios e se posicionarem como sujeitos construtores de suas aprendizagens.

No intuito de promover intervenções e potencializar o desenvolvimento, é importante que o professor tenha clareza dos objetivos de ensino que cada ano intenta. Conhecer o currículo e olhar para o mesmo a partir do que os alunos já aprenderam produz planejamentos condizentes com as necessidades de aprendizagem das turmas.

Naturalmente, as turmas são heterogêneas, com muitas diferenças em termos daquilo que os alunos já sabem e o que precisam aprender. Planejar aulas voltadas só para uma expectativa em termos da maioria da turma, desconsiderando dificuldades de parte dela, assim como fazer discussões acima do esperado, são ações contrárias à perspectiva formativa, e com vistas a inclusão de todos. É papel do professor e da escola, vinculado às condições de trabalho, buscar alternativas, propondo estratégias de ensino acordadas com as potencialidades dos alunos.

A partir deste desafio de compreender cada aluno e intentar um ensino realmente baseado no incluir, um recurso metodológico interessante tem sido o uso de quadro de mapeamento, com o intuito de conhecer individualmente, e também em grupo, as aprendizagens dos alunos, e assim organizar um trabalho pedagógico orientado.

O mapeamento se constitui, na prática, como a construção de quadros de dados com destaque de conteúdos ou objetivos de ensino que cada aluno deve desenvolver no ano, semestre ou bimestre letivo. A legenda pode variar de acordo com cada professor, mas uma básica seria: RI (resolve com independência), RA (resolve com auxílio) e AN (ainda não resolve). Abaixo, um modelo de Ficha de Mapeamento das Aprendizagens Matemáticas[10]:

Professor(a) Regente: ______________ Matrícula: ______________ Ano/ Turma: ______________	EIXO: NÚMEROS E OPERAÇÕES																							
	CONTAGEM								SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL						OPERAÇÕES E NÚMEROS FRACIONÁRIOS									
															Divisão		ultiplicação			Frações			Decimais	
Alunos	Compara quantidades	Ordena quantidades	Quantifica até as centenas	Quantifica até os milhares	Posiciona números na reta	Representa números decimais	Realiza calculo mental em operações	Utiliza de registros variados para solucionar situações	Agrupamento	Valor posicional	Agrupamento e troca	Desagrupamento	Leitura dos números	Escrita dos números	Partilha	Medida	Proporcionalidade	Configuração retangular	Combinação	Equivalência	Comparação	Compreensão de situações	Relação número fracionário	Compreensão de situações
1.																								
2.																								
3.																								
4.																								
5.																								
6.																								
7.																								

Em uma perspectiva de avaliação com o foco nas aprendizagens, ao preencher a Ficha de Mapeamento das Aprendizagens, o professor pode fazer dois tipos de leituras:

1) Leitura horizontal: conhecer os alunos

2) Leitura vertical: conhecer a turma diante do conteúdo

10 Ficha de mapeamento criada e utilizada em escolas da Coordenação Regional de Ceilândia, no ano de 2014.

A partir da consciência da realidade da sua turma e de cada aluno, torna-se essencial o redirecionamento dos planejamentos. Estratégias já pensadas na rede, como: reagrupamentos, projetos interventivos, agrupamentos produtivos podem ser ações para a organização de aulas orientadas para aquilo que determinados alunos precisam.

A avaliação formativa se constituirá a partir de iniciativas diárias, de mudanças metodológicas quando necessárias, de um olhar atento a cada criança, da busca pelo desenvolvimento profissional na constituição de práxis. Tais ações não podem depender apenas do professor, mas dos coletivos das escolas e da rede de ensino.

Referências

BARI, Valéria Aparecida. *O potencial das histórias em quadrinhos na formação de leitores:* busca de um contraponto entre os panoramas culturais brasileiro e europeu. Tese (Doutorado em Ciência da Informação). São Paulo: Escola de Comunicação e Artes/Universidade de São Paulo -- ECA/USP, 2008.

BERTONI, Nilza Eigenheer e GUIDI, Rafaela Mousinho. *Numerização*. Apostila mimeografada. Projeto "Um Novo Currículo de Matemática da 1ª à 8ª Séries". UnB, Dep. Matemática. PADCT/SPEC. Brasília: 1987.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática.Brasília: 1997.

BRASIL, Secretaria do Ensino Fundamental / MEC.PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS ensino fundamental -- Matemática. Brasília: MEC/ SEF, 1997.

Brasil. Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: *Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores.* Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008. 200 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). v. 3. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. *Pacto nacional pela alfabetização na idade certa:* currículo na alfabetização: concepções e princípios: ano 3: unidade 1 / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. -- Brasília : MEC, SEB, 2012.

BROITMAN, Claudia, ITZCOVICH Horácio. Geometria nas Séries iniciais do Ensino Fundamental: problemas de seu ensino, problemas para seu ensino. In PANIZZA, Mabel. *Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais: análise e propostas*. Artmed, SP, 2003.

BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino.* São Paulo: Editora Ática, 2008.

BRYANT, Peter e NUNES, Terezinha. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

CURY, Helena Noronha. *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. 116 p.

Didactique des Mathématiques,10(23): 133-169. Paris:1991.

FIORENTINI, Dário. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino de Matemática no Brasil. Zetetiké. Campinas: UNICANP, ano 3, n. 4 1-36 p, 1995.

GERDES, Paulus. Sobre o despertar do Pensamento Geométrico. Editora UFPR, Curitiba, 1992.

GREEMBERG, Marvin, Jay. *Geometria Euclidianae não Euclidiana*. San Francisco: W.H.Freeman,1980.

Ifrah, Georges (1997). *História universal dos algarismos (tomo 1).* Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira. (Tradução portuguesa do original de 1994)

MONTEIRO, Luiz Henrique Jacy. Álgebra Moderna. Vol. I. São Paulo: LPM, 1663.

MUNIZ, C.A.; BATISTA, C.O.; SILVA, E.B. Módulo IV -- *Matemática e Cultura: Decimais, Medidas e Sistema Monetário*. Brasília: Universidade de Brasília, 2008. 109 p.

MUNIZ. Cristiano Alberto. A produção de notações matemáticas e seus significados. *In*: FÁVERO, Maria Helena; CUNHA Célio da; *Psicologia do conhecimento: O diálogo entre as ciências e a cidadania.* Brasília: Liber Livros, 2009.

NACARATO, Adair Mendes e SANTOS, Cleane Aparecida. Aprendizagem em Geometria na educação básica. A fotografia e a escrita na sala de aula. Autêntica Editora, 2014 -- Coleção Tendências em Educação Matemática, 2014.

NUNES, T; CAMPOS, T.M.M.; MAGINA, S. e BRYANT, P. *Introdução à Educação Matemática.* São Paulo: PROEM Editora Ltda, 2001.

OTTE, Michel, 1980.

PAIS, Luiz Carlos. Intuição, experiência e teoria geométrica. Zetetiké. Cempem/FE/ Unicamp, Campinas, SP, v. 4, n. 6, p. 65-74, 1996.

PAIS, Luiz Carlos. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino de geometria. In: Reunião da Anped, 23, 24 a 29 de setembro de 2000. Caxambu, MG. Disponivel em: <www.anped.org.br/23 textos/1919.pdf>. Acesso: março, 2017.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança*. Trad. Christiano Monteiro Oiticica. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

PONTES, Maria Gilvanise de Oliveira. *Medidas e Proporcionalidade na Escola e no Mundo do Trabalho*. João Pessoa: Ideia, 2009.

SANTOS, João Ricardo Viola; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Da ideia de erro para as maneiras de lidar: caracterizando nossos alunos pelo que eles têm e não pelo que lhes falta. In: BURIASCO, Regina Luzia Corio de. (Org.) *Avaliação e educação matemática.* Recife: SBEM, 2008.

SE Currículo em Movimento.

SILVA, Cilia Cardosos Rodrigues da Silva. *Construção de conceitos de grandezas e medidas nos anos iniciais: comprimento, massa e capacidade.* 2011. 230 f. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2011.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en.*

______. Multiplicative conceptual field: what and why? In: HAREL, Guershone CONFREY, Jere. (editores). *The Development of Multiplicative Reasoning.* Albany: State University of New York Press, 1994.

______. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto (Orgs.). *A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.* Curitiba: Editora CRV, 2009.

______. *A criança, a matemática e a realidade:* problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. da UFPR, 2014.